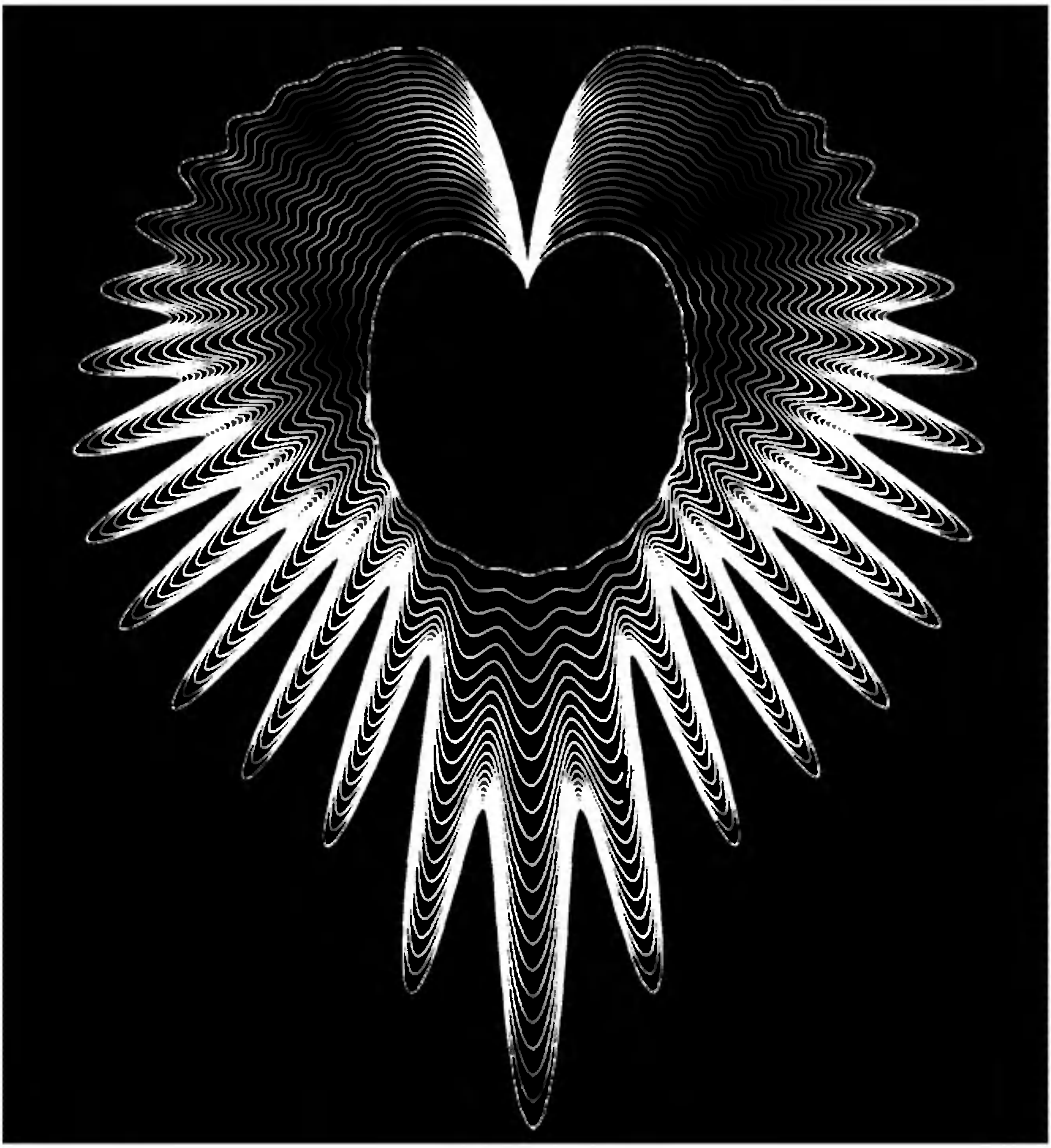
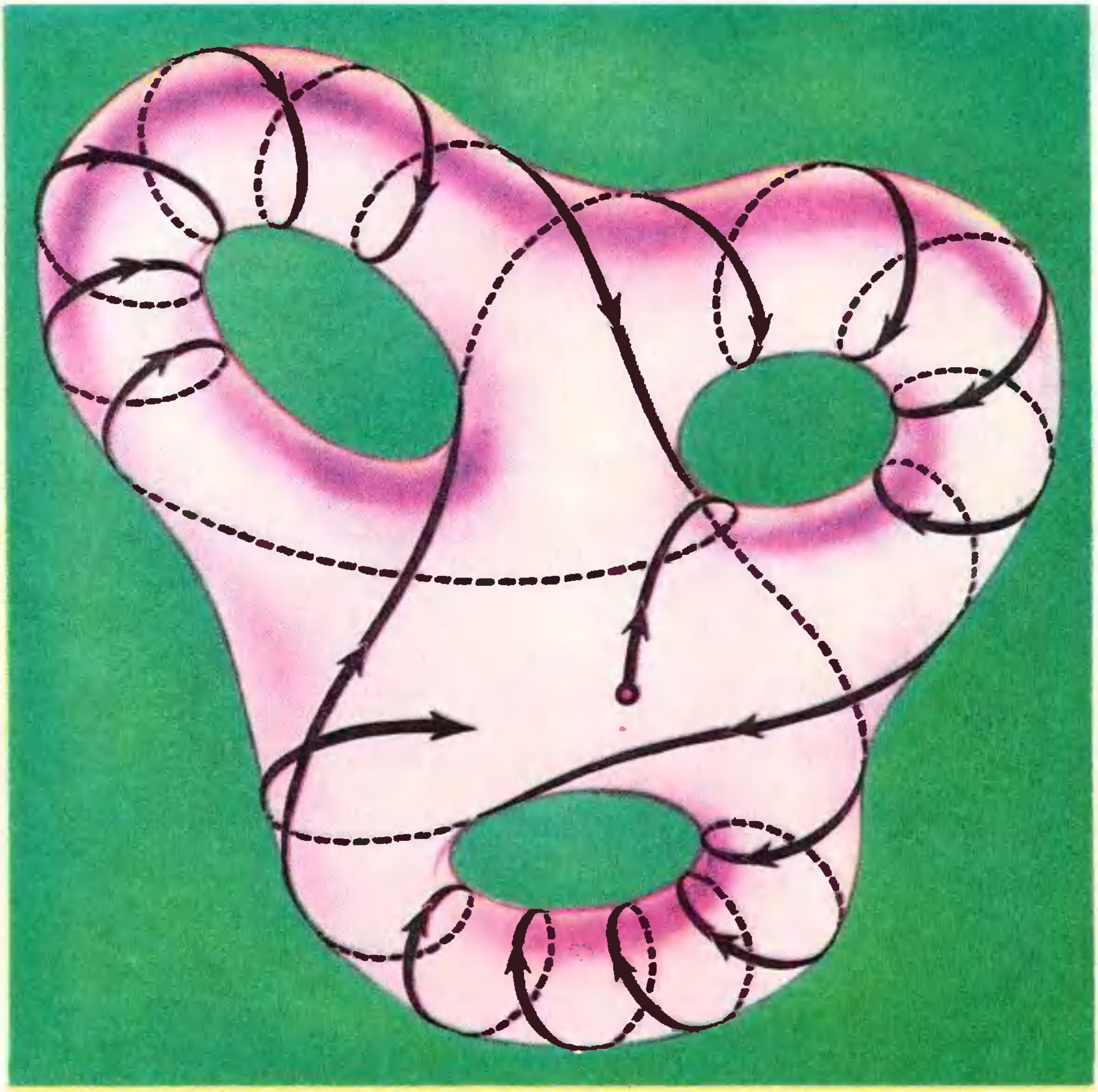
ISSN 0130-2221

Квант

9
1979

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





На этом рисунке показано, как, отражаясь от стенок, биллиардный шарик движется по равнобедренному треугольнику с углом при вершине $\pi/6$. Нет, нет, это не опечатка. Дело в том, что при обычном изображении траектории на треугольнике, число изломов и самопересечений очень велико, картина получается крайне запутанная. Значительно более ясная (и красивая!) картина возникает, если склеить из 12-ти экземпляров нашего треугольника правильный 12-ти угольник, а затем отождествить его противоположные стороны. Тогда получается замкнутая поверхность с тремя «ручками», а траектория плавно вокруг нее обвивается. Зачем и как это делается вы можете прочитать в статье «Биллиарды и поверхности» на с. 2.

Основан в 1970 году

Квант

9
1979

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

Кривые на первой странице обложки нарисованы ЭВМ с помощью системы АЛГРАФ. Подробнее об этих кривых см. на четвертой странице обложки

Ю. Котов

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1979

А. Земляков

Биллиарды и поверхности

Отражаясь от стенок, точечный шарик движется по биллиардному столу многоугольной формы. При каких условиях его движение будет периодическим? Бывают ли, при данном непериодическом движении, такие области, куда шарик не попадет никогда? Чтобы ответить на эти просто формулируемые, но трудные вопросы, в этой статье вместо движения с отражениями по плоскости рассматривается движение без отражений по поверхности. Оказывается, от биллиарда в многоугольнике к движению по поверхности можно перейти некоторой склейкой многоугольников.

В начале статьи этот переход поясняется на примере прямоугольного биллиарда. После необходимого разговора о склейке поверхностей рассматривается общий случай. В частности, решаются задачи 16 и 17 из статьи «Математика биллиарда» («Квант», 1976, № 5).

1. Биллиард в прямоугольнике и обмотки тора

Нас интересует следующий вопрос: какими могут быть траектории биллиардного шара, движущегося в прямоугольнике П? Мы считаем шар точкой и интересуемся бесконечными траекториями — никогда не попадающими в вершины прямоугольника (рис. 1). Наличие многочисленных отражений от стенок биллиарда сильно затрудняет исследование траекторий шарика. Однако каждую биллиардную траекторию можно «выпрямить» с помощью последовательных отражений ее отрезков относительно сторон прямоугольника — так, как показано на рисунке 2. Если с самого начала с помощью отражений «замостить» всю плоскость прямоугольниками, конгруэнтными П, то, при обратных отражениях, прямые на плоскости дадут биллиардные траектории в прямоугольнике П. Оказывается, нет нужды рассматривать бесконечное множество отраженных прямоугольников — можно обойтись четырьмя, образующими «большой» прямоугольник П′ (рис. 3), если считать, что шарик, дойдя до его стороны, «перепрыгивает» в соответственную точку противолежащей стороны ($C \to C'$, $E \to E'$, ..., $K \to K'$, $L \to L'$, ..., $S \to S'$) и движется в прежнем направлении до следующего попадания на одну из его сторон. Действительно, складывая (с помощью симметрий) из П′ прямоугольник П, мы получим из прыгающих траекторий в П′ настоящие биллиардные траектории в П.

Таким образом, мы сумели избавиться от отражений траектории, однако у нее появились «прыжки». Чтобы избавиться от них, свернем прямоугольник П′ в цилиндр и склеим стороны XY и $X'Y'$; при этом точки L и L', N и N', ..., I и I' (рис. 3) склеются между собой, и траектория будет плавно обматываться вокруг цилиндра (рис. 4). Однако остаются

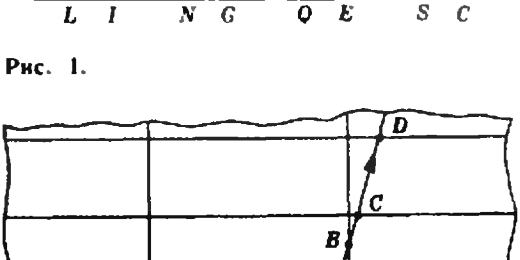


Рис. 1.

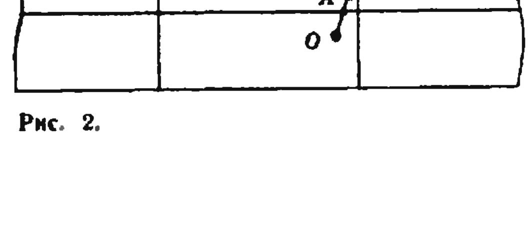


Рис. 2.

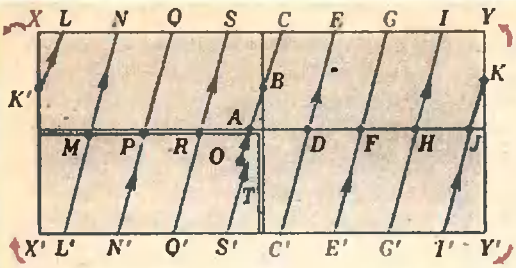


Рис. 3.

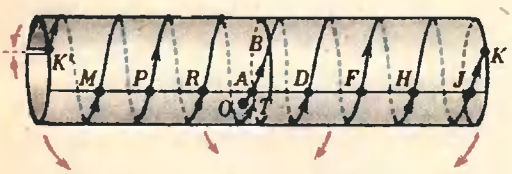


Рис. 4.

еще прыжки со стороны YY' на сторону XX' (на наших рисунках — прыжок $K \to K'$). Чтобы избавиться и от них, свернем цилиндр, считая его как бы резиновым, в кольцо и склеим его основания: получим поверхность, напоминающую бублик — математики называют ее *тором*, — по которой плавно обматывается, без отражений и скачков, наша траектория (рис. 5).

2. Биллиардные траектории в прямоугольнике

Тор можно также получить вращением окружности Г около не пересекающей ее оси ZZ', лежащей в плоскости окружности (рис. 6). При этом каждая точка окружности Г даст на торе окружность, которую назовем *параллелью* тора. Окружности, получающиеся из Г при каждом конкретном повороте, естественно назвать *меридианами* тора (рис. 6). Наконец, большой прямоугольник П', из которого был склеен тор, удобно рассматривать как *карту* тора. Хотя траектория из п. 1 обматывается вдоль тора, следить за ней можно, как и в навигации, по карте.

Пусть шарик движется с единичной скоростью под углом α к стороне «a» прямоугольника П. Тогда составляющие скорости движения по карте тора П' вдоль параллелей и меридианов равны, соответственно, $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$. Параллели на карте тора имеют длину $2a$, поэтому через время $t_0 = 2a/\cos\alpha$ точка на торе возвращается на прежний меридиан, причем сдвигается вдоль него на расстояние (по карте) $l_0 = t_0 \cdot \sin\alpha = 2a \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$. Таким образом, последовательные точки пересечения траектории, обматывающей тор, с фиксированным меридианом получаются одна из другой поворотом на один и тот же угол, равный в радианах

$$\varphi = 2\pi \frac{l_0}{2b} = 2\pi \frac{a}{b}\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

(здесь $2b$ — длина меридианов тора на карте). Следовательно, траектория на торе будет замкнутой, т. е. периодической, если некоторое целое число поворотов на угол φ даст пово-

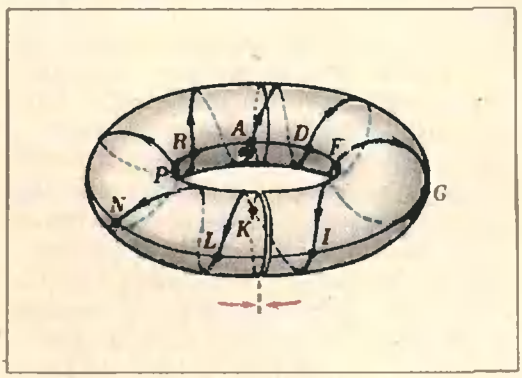


Рис. 5.

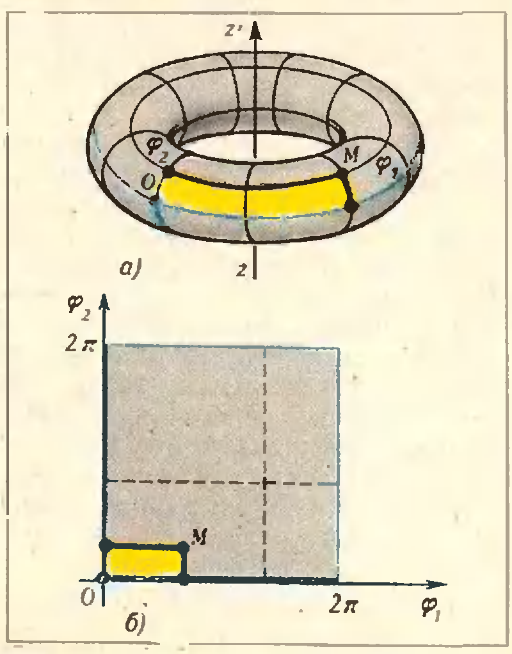


Рис. 6.

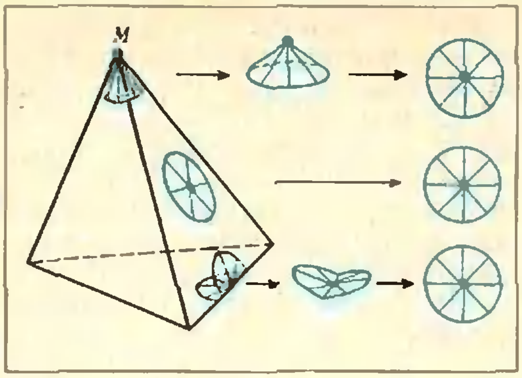


Рис. 7.

рот на целое кратное 2π, то есть $n\varphi = 2\pi m$ или $\frac{a}{b} \operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{n}$ — рациональное число. Если же число $(a/b) \operatorname{tg} \alpha$ иррационально, то траектория на торе будет незамкнутой — непериодической. Точки пересечения траектории с каждым фиксированным меридианом расположены на нем *всюду плотно*, т. е. так, что они попадают в любую окрестность любой его точки*). В силу произвольности выбора меридиана, непериодическая траектория будет всюду плотной на всем торе, соответствующая траектория всюду плотна на карте тора П′, а биллиардная траектория всюду плотна в прямоугольнике *П*. Проще можно сказать так: *где бы мы ни проделали дырочку* (радиуса $r>0$) *в прямоугольном биллиардном столе, точечный биллиардный шарик, пущенный под таким углом* α *к стороне а, что число* $(a/b) \operatorname{tg} \alpha$ *иррационально, рано или поздно провалится в эту дырочку.*

Итак, мы свели биллиард в прямоугольнике к «обмоткам» тора и установили следующий важный факт: *любая биллиардная траектория, не попадающая в вершины прямоугольника, либо периодична* (*в случае* $(a/b) \operatorname{tg} \alpha \in \mathbf{Q}$), *либо всюду плотна в прямоугольнике* (*в случае* $(a/b) \operatorname{tg} \alpha \notin \mathbf{Q}$). Тем самым решена задача 16 из статьи «Математика биллиарда». Не желая лишать читателя удовольствия, задачу 17 из той же статьи мы предложим в виде следующих задач:

Задача 1. *Аналогичным образом докажите, что любая не попадающая в вершины биллиардная траектория в равнобедренном прямоугольном треугольнике либо периодична, либо всюду плотно заполняет соответствующий треугольник.*

Задача 2. *Докажите то же самое для:* а) *равностороннего треугольника,* б) *прямоугольного треугольника с углом в* 30°.

Если задача 2 не будет получаться, отложите ее до прочтения пп. 3, 4.

3. Поверхности и их склейка

Конечно, интересно посмотреть, что получится для биллиардов в других многоугольниках (отличных от прямоугольника и треугольников из задач 1, 2). Нельзя ли обобщить конструкцию из п. 1 на произвольный случай? Прежде, однако, разберемся с поверхностями и склейками.

В § 47 учебника «Геометрия 10» замкнутая многогранная поверхность определяется как множество точек в пространстве, составленное из многоугольников и удовлетворяющее некоторым условиям. *Основное свойство* такой поверхности заключается в том, что каждая ее точка *М* обладает окрестностью, которая может быть непрерывно преобразована в обычный круг с центром в точке *М* (рис. 7). Под *окрестностью* точки *М* понимается множество точек поверхности, удаленных от *М* не более чем на некоторое расстояние $\varepsilon>0$. При наших непрерывных преобразованиях окрестность можно изгибать, местами сжимать или растягивать, но запрещается «склеивать» между собой ее точки и «разрывать» окрестность. Если представить себе окрестность точки *М* сделанной из резины, то нужное преобразование можно получить, если положить окрестность под пресс и, медленно растягивая (так, чтобы не получилось складок и разрывов), расплющить ее.

Указанным основным свойством обладают не только замкнутые многогранные, но и искривленные поверхности — например, сфера или тор. Если в сфере вырезать две дырки и заклеить их подходящим образом изо-

*) См. теорему Якоби в статье «Математика биллиарда».

гнутой «ручкой» — боковой поверхностью цилиндра, то получится «сфера с ручкой», которая может быть преобразована в тор (рис. 8). Приклеив к сфере аналогичным образом две ручки, мы получим так называемый *крендель*, или сферу с двумя ручками; на рисунке 9 эта поверхность представлена в пяти видах. Можно построить сферу S_p с любым числом приклеенных ручек $p \geqslant 0$. Легко видеть, что все сферы с ручками обладают основным свойством.

Полная поверхность цилиндра также обладает этим свойством, а его боковая поверхность — нет: точки M на окружностях оснований имеют окрестности в виде искривленного полукруга; их нельзя деформировать без разрывов и склеек в круг с центром в точке M (рис. 10). Далее, поверхность двойного конуса и объединение двух пересекающихся или касающихся сфер не обладают основным свойством (рис. 11), а объединение двух непересекающихся сфер — обладает.

Мы хотим исключить из рассмотрения поверхности, состоящие из нескольких отдельных кусков. Потребуем поэтому, чтобы любые две точки поверхности можно было соединить проходящей по поверхности непрерывной линией. Это свойство называется *связностью* поверхности.

Мы не хотим рассматривать и бесконечно протяженные поверхности — такие как плоскость или бесконечная цилиндрическая поверхность — а также поверхности типа круга без границы. Поэтому наложим еще одно условие (назовем его *конечностью*): потребуем, чтобы поверхность можно было разбить («разрезать») на конечное число «криволинейных многоугольников», каждый из которых без разрывов и склеек преобразовывается в плоский выпуклый многоугольник (с границами). Например, сфера по экватору и четырем меридианам разрезается на 8 криволинейных треугольников, а плоскость на конечное число многоугольников разбить нельзя.

Итак, далее мы рассматриваем только такие поверхности (множества точек пространства), которые обладают тремя перечисленными свойствами: основным свойством, свойством конечности и связностью.

Две такие поверхности считаются *эквивалентными* (математики говорят — «топологически эквивалентны-

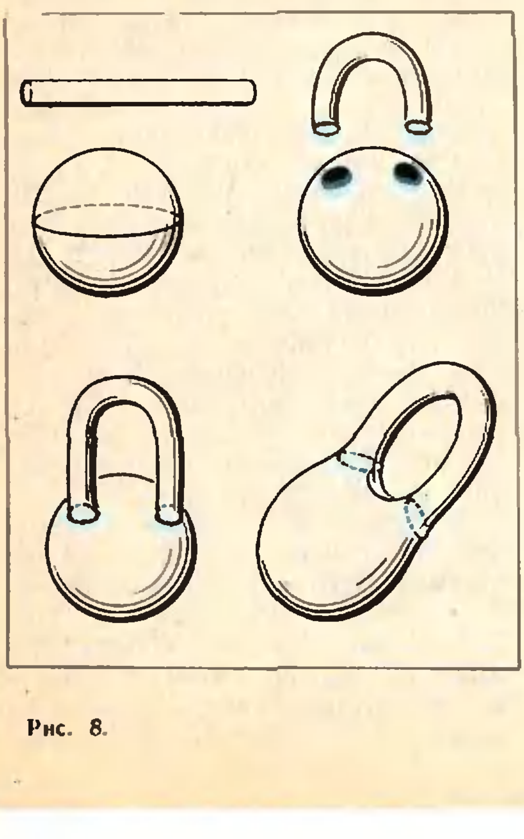


Рис. 8.

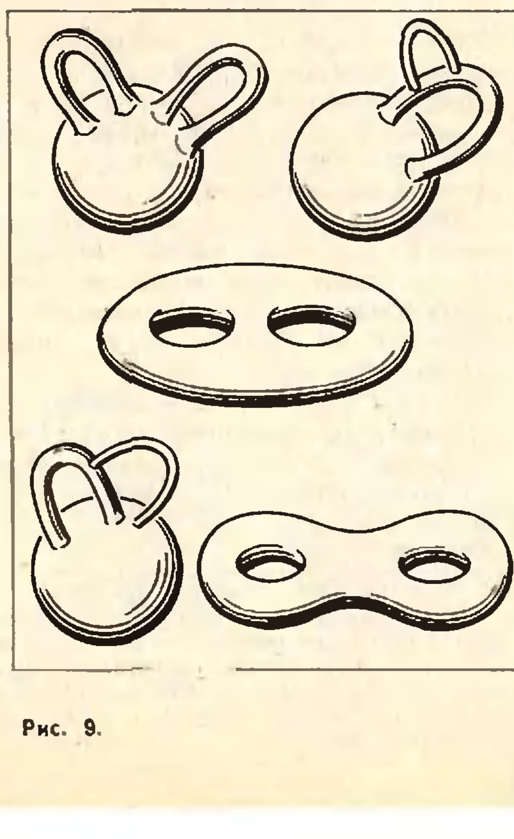


Рис. 9.

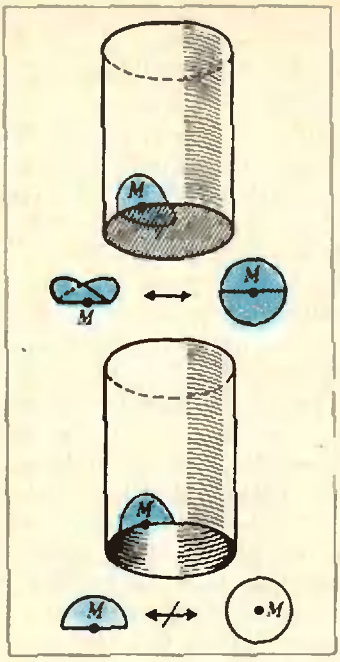


Рис. 10.

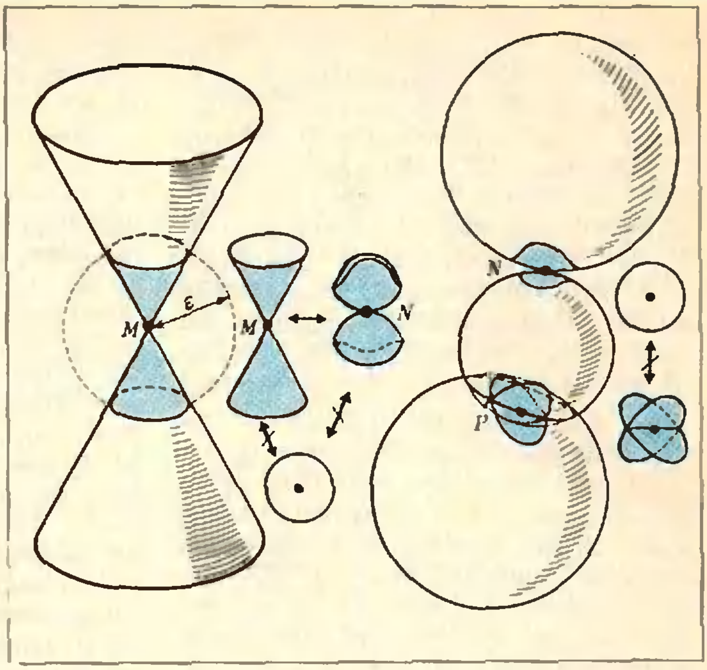


Рис. 11.

ми»), если существует обратимое отображение одной из них на другую, при котором нет ни разрывов, ни склеек (но допускаются растяжения, сжатия, изгибания и разгибания). Например, поверхность тетраэдра эквивалентна сфере, две последние поверхности на рисунке 8 эквивалентны тору, все пять поверхностей на рисунке 9 эквивалентны между собой. Можно доказать*), что *любая поверхность в пространстве* (в нашем смысле) *эквивалентна ровно одной из сфер с p ручками* (т. е. либо сфере, либо тору, либо кренделю, либо сфере с p ручками для некоторого $p>2$).

Задача 3. *Покажите, что тор, крендель и, вообще, сфера с любым числом ручек обладают свойством конечности, т. е. укажите их разбиения на конечное число криволинейных многоугольников.*

Задача 4. *Для каждой из перечисленных ниже поверхностей укажите, сфере с каким числом ручек она эквивалентна*: а) *поверхность чашки* (*рис. 12а*); *б*) *поверхность стула* (*рис. 12б*); *в*) *поверхность оконного переплета* (*рис. 12в*)).

Задача 5*. *Покажите, что тор и сфера не эквивалентны.*

Указание. Найдите такое свойство, которое сохраняется при рассматриваемых преобразованиях и которым одна из этих поверхностей обладает, а другая — нет.

Поверхность, обладающая свойством конечности, разрезается на многоугольники и поэтому может быть склеена из многоугольников. Оказывается, можно обойтись одним многоугольником. Мы уже видели, что тор может быть получен склейкой противолежащих сторон квадрата (или прямоугольника). Так вот, из любого $2n$-угольника после попарной склейки его противолежащих сторон получается поверхность нашего типа, т. е. сфера с некоторым числом ручек. Например, на рисунке 13 показано, как при склейке сторон восьмиугольника получается крендель.

Задача 6. *Найдите число ручек p поверхности S_p, склеенной указанным выше образом из $2n$-угольника.*

В принципе закон склейки сторон $2n$-угольника можно задавать произвольно, но при этом далеко не всегда получится поверхность нашего типа.

---

*) См., например, статью В. А. Ефремовича «Основные топологические понятия» в книге V «Энциклопедии элементарной математики» (М., «Наука», 1966) или главу 3 в книге Г. Рингеля «Теорема о раскраске карт» (М., «Мир», 1977).

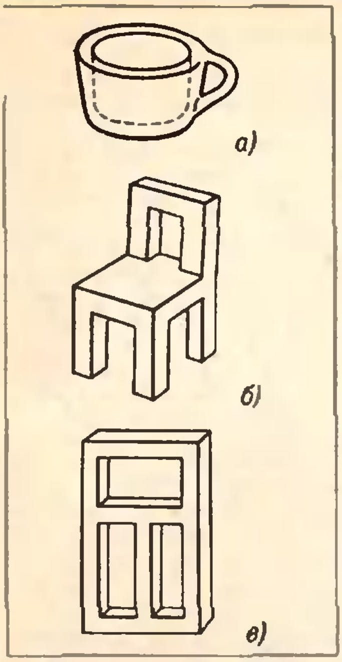


Рис. 12.

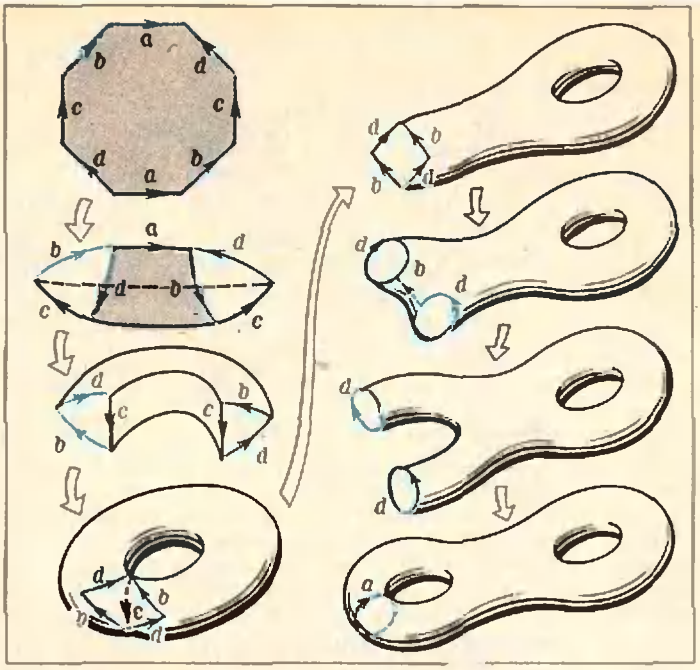


Рис. 13.

Задача 7. *Проведите склейку по рисункам 14а, б.* (В случае 14а получится самопересекающаяся поверхность — так называемая «бутылка Клейна».)

4. Биллиарды и поверхности

Вернемся к биллиардам: попытаемся конструкцию из п. 1 обобщить на случай произвольного многоугольника. Что при этом может получиться, покажем на примере прямоугольного треугольника $T = ABC$ с острым углом $\hat{A} = \pi/8$.

Для выпрямления биллиардной траектории в T опять воспользуемся последовательными отражениями. Такие отражения относительно сторон, исходящих из вершины A, дадут, как показано на рисунке 15*а*, правильный восьмиугольник, составленный из 16 треугольников $T_1 = T$, T_2, T_3, ..., T_{16}, конгруэнтных треугольнику T. Заметим, что замостить всю плоскость треугольниками, конгруэнтными T, с помощью отражений нельзя. Сейчас мы увидим, что это и не нужно, — можно обойтись 16 указанными треугольниками.

Пусть траектория $[PM)$ доходит до точки M на стороне восьмиугольника Q. Продолжение $[PM)$ за точку M в случае, изображенном на рисунке 15*а*, следовало бы рисовать в треугольнике T_5', симметричном T_3. Заметим, что среди треугольников T_i есть треугольник T_{12}, из которого T_5' получается параллельным переносом. Легко видеть, что этот перенос можно выполнить как последовательную композицию симметрий:

$$T_{12} \to T_{11} \to T_{10} \to \ldots \to T_6 \to T_5 \to T_5'.$$

При этом луч, проведенный через соответственную точку M' (такую, что $|A'M'| = |AM|$ — рис. 15*а*) на стороне треугольника T_{12} параллельно лучу $[PM)$, при указанной композиции отобразится на продолжение луча $[PM)$ за точку M. Поэтому можно считать, что шарик перепрыгивает из точки M в точку M' и про-

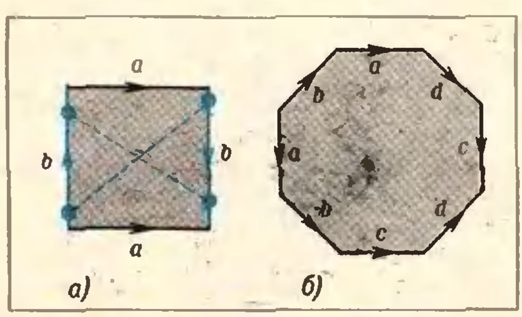


Рис. 14.

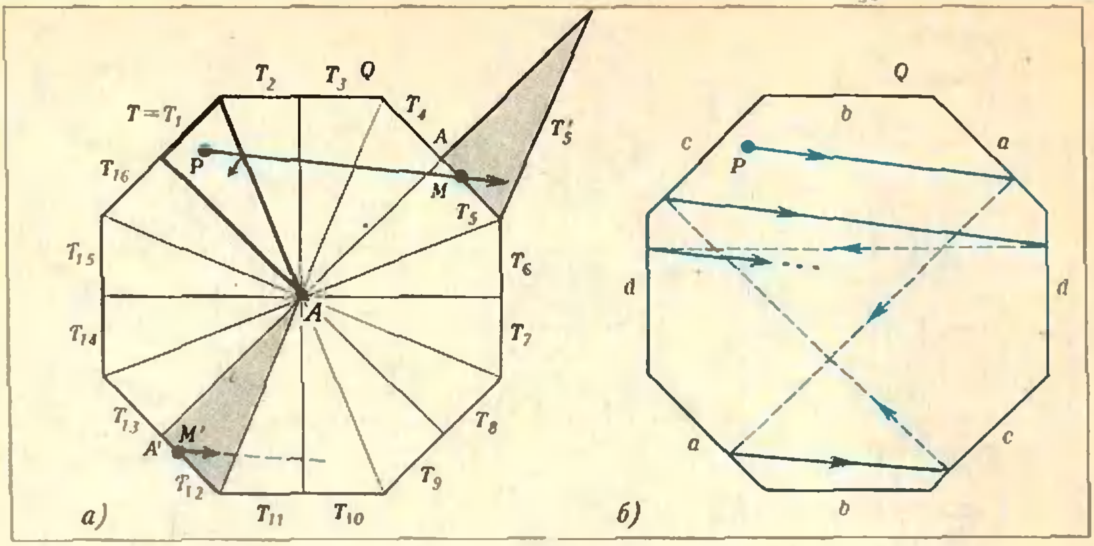


Рис. 15.

должает движение в прежнем направлении по восьмиугольнику Q: прыгающая траектория в Q после отражений даст биллиардную траекторию в треугольнике T. Такое же рассуждение проходит и во всех других случаях, какой бы из треугольников T_i ни собиралась покидать траектория, выходя за пределы восьмиугольника Q. Таким образом, как и выше (в п. 1), биллиардным траекториям в треугольнике T отвечают траектории шарика, движущегося в одном и том же направлении внутри восьмиугольника Q и перепрыгивающего — при достижении его сторон Q — в соответственные точки противолежащих сторон (начало одной из таких траекторий изображено на рисунке 15*б*).

Чтобы сделать прыгающие траектории непрерывными, нужно склеить противолежащие стороны восьмиугольника Q. Как мы видели в п. 3, при этом получится крендель, а биллиардным траекториям в треугольнике T будут отвечать обматывающие этот крендель кривые!

Хотя на кренделе и нельзя ввести хорошие координаты по образцу тора, тем не менее с помощью описанной конструкции можно доказать, что *любая биллиардная траектория в прямоугольном треугольнике с острым углом $\pi/8$, не попадающая в вершины, либо периодична, либо всюду плотно заполняет треугольник*. Доказательство этого утверждения мы оставляем в качестве весьма трудной задачи (без номера).

Задача 8. *Постройте поверхности, отвечающие биллиардам: а) в прямоугольном треугольнике с углом $\pi/12$, б) в прямоугольном треугольнике с углом $\pi/5$, в) в квадрате с вырезанной в нем квадратной дыркой (стороны дырки параллельны сторонам квадрата).*

Оказывается, *биллиард в любом многоугольнике, величины всех углов которого соизмеримы с π, сводится к движениям по соответствующим поверхностям — сферам с p ручками* (где p больше 1 во всех случаях, кроме прямоугольника и треугольников из задач 1, 2). Мы изложим доказательство этого факта в виде серии задач.

Задача 9*. а) Биллиардный шар движется под углом α к фиксированной стороне a многоугольника Φ и, отразившись от стороны, образующей с a угол β, продолжает движение под новым углом α' к стороне a. Выразите α' через α и β.

• Предположим теперь, что величины всех углов многоугольника Φ соизмеримы с π или, что то же самое, что стороны Φ образуют с фиксированной стороной a углы $\beta_i = \frac{m_i}{n_i}\pi$, где m_i и n_i — целые.

б) Докажите, что если начальный отрезок биллиардной траектории в многоугольнике Φ направлен под углом α к стороне a, то все следующие отрезки этой траектории могут быть направлены к стороне a только под конечным числом углов $\alpha_1 =$

$= \alpha, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_N$, не зависящих от выбора начальной точки движения.

в) Пусть все углы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ из пункта б) отличны от углов β_i, т. е. траектория никогда не идет параллельно сторонам многоугольника Ф. Возьмем N многоугольников $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_N$, конгруэнтных Ф, и в многоугольнике Φ_k проведем все возможные отрезки под углом α_k к стороне a. Рассмотрим биллиардную траекторию, выходящую из произвольной точки под углом $\alpha = \alpha_1$ к a. Ее отрезки, идущие под углами α_k к стороне a (см. пункт б), будем брать в соответствующих многоугольниках Φ_k. Тогда биллиардной траектории в Ф будет отвечать траектория в объединении многоугольников Φ_k, «перепрыгивающая» при достижении сторон Φ_k в соответственные точки каких-то следующих многоугольников из числа $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_N$ (нарисуйте!). Докажите, что после склейки соответствующих пар сторон этих N многоугольников получится поверхность нашего типа.

Пояснение. Согласно определению из п. 3 нужно проверить наличие у каждой точки M получившегося после склейки множества окрестности, преобразующейся без разрывов и склеек в круг с центром в M. Для точек внутри многоугольников это тривиально, для точек на сторонах Φ_k — очевидно (объясните). Остается рассмотреть окрестности точек, получающихся склейкой вершин многоугольников Φ_k.

Во всех случаях, когда биллиард в многоугольнике Ф сводится к обмоткам некоторой сферы с ручками, можно доказать, что любая траектория либо попадает в одну из вершин Ф, либо периодична, либо всюду плотно заполняет Ф. Физиками уже давно высказана гипотеза, что так будет для любого многоугольника*). До настоящего времени эта гипотеза не доказана и не опровергнута!

*) Интерес к биллиардам в многоугольниках возник в связи с так называемой «эргодической гипотезой» статистической механики, которая в сильном своем виде говорит о возрастании энтропии в физических системах, а в слабой формулировке в данном случае как раз и есть сформулированная нами гипотеза о периодичности и всюду плотности. Отметим, что для многих фигур с кривыми границами последняя гипотеза доказана.

Советуем купить!

Математика

Болтянский В. Г., Сидоров Ю. В., Шабунин М. И. *Лекции и задачи по элементарной математике*, 2 изд. (М., «Наука», 1974), 576 с., 81 к.

Лидский В. Б., Овсянников Л. В., Тулайков А. Н., Шабунин М. И. *Задачи по элементарной математике*, 7 изд., испр. и доп. (М., «Наука», 1973), 416 с., 70 к.

Лурье М. В., Александров Б. И. *Задачи на составление уравнений* (М., «Наука», 1976), 80 с., 12 к.

Физика

Гурский И. П. *Элементарная физика с примерами решения задач*, 2 изд., испр. и доп. (М., «Наука», 1976), 94 к.

Зубов В. Г., Шальнов В. П. *Задачи по физике*. Пособие для самообразования, 10 изд., стереотип. (М., «Наука», 1975), 280 с., 47 к.

Пинский А. А. *Задачи по физике* (М., «Наука», 1977), 288 с., 65 к.

Баканина Л. П., Белонучкин В. Е., Козел С. М. и др. *Сборник задач по физике*, 3 изд., испр. (М., «Наука», 1975), 416 с., 67 к.

Буховцев Б. Б., Кривченков В. Д., Мякишев Г. Я., Сараева И. М. *Сборник задач по элементарной физике*. Пособие для самообразования, 4 изд., перераб. (М., «Наука», 1974), 416 с., 72 к.

Селезнев Ю. А. *Основы элементарной физики*, 4 изд., перераб. (М., «Наука», 1974), 544 с., 92 к.

Физика, пер. с англ.

ч. I. *Вселенная* (М., «Наука», 1973), 432 с., 1 р. 30 к.

ч. II. *Оптика* (М., «Наука», 1973), 400 с., 1 р. 18 к.

ч. III. *Механика* (М., «Наука», 1974), 432 с., 1 р. 22 к.

ч. IV. *Электричество и строение атома* (М., «Наука», 1974), 528 с., 1 р. 42 к.

Элементарный учебник физики, под ред. акад. Г. С. Ландсберга, 9 изд., стереотип. (М., «Наука», 1975).

т. I. *Механика. Теплота. Молекулярная физика*, 656 с., 1 р. 11 к.

т. II. *Электричество и магнетизм*, 528 с., 91 к.

т. III. *Колебания и волны. Оптика. Строение атома*, 640 с., 1 р. 13 к.

Эллиот Л., Уилкокс У. *Физика*, пер. с англ. (М., «Наука», 1975), 736 с., 1 р. 94 к.

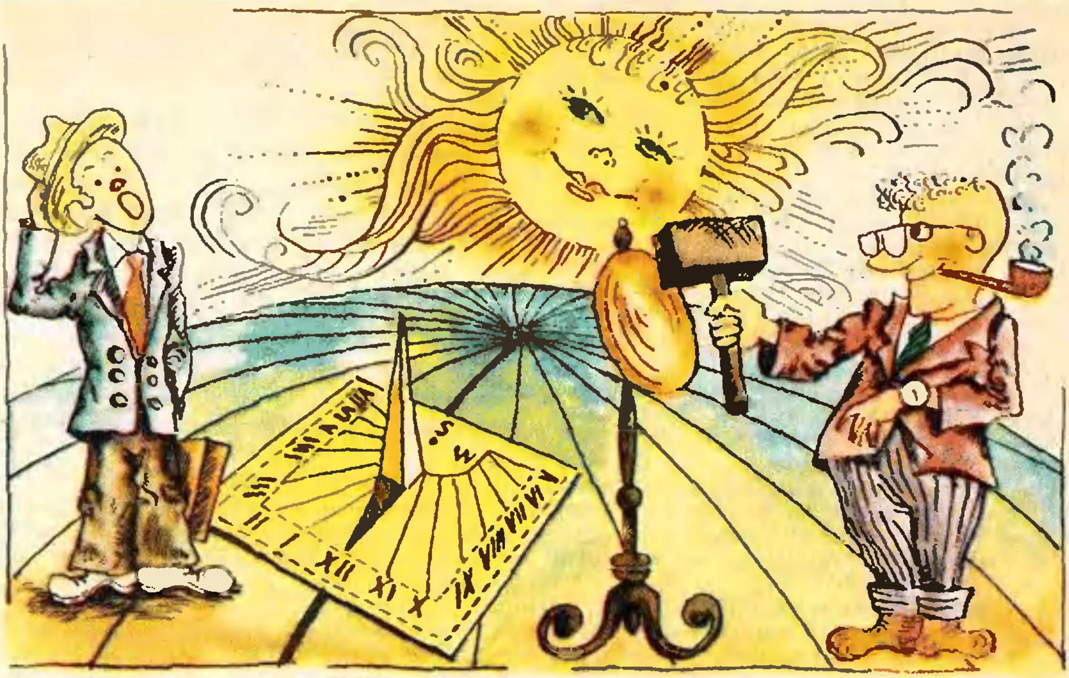
Яворский Б. М., Пинский А. А. *Основы физики*, 2 изд. перераб., (М., «Наука», 1974). Том I — 98 к., том II — 1 р.

Яворский Б. М., Селезнев Ю. А. *Справочное руководство по физике для поступающих в вузы и самообразования* (М., «Наука», 1975), 624 с., 1 р. 15 к.

Перечисленные выше книги можно приобрести в магазинах Книготорга, Центрокоопкниги и Академкниги, распространяющих литературу данной тематики.

При отсутствии этих изданий на месте заказы следует направлять по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект 15, Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука».

Книги будут высланы наложенным платежом, без задатка.



А. Михайлов

Когда наступает полдень?

Прежде чем ответить на этот вопрос, зададим другой: что такое полдень? Казалось бы, слово говорит само за себя: полдень — это половина дня, то есть средний момент между восходом и заходом Солнца. Но можно ли на основании такого определения точно установить момент полдня, например, стукнуть молоточком и сказать: «Вот наступил полдень»? Очевидно, нет. Во-первых, моменты восхода и захода Солнца можно уверенно заметить разве лишь на море, где горизонт идеально правильный. Во-вторых, заход Солнца происходит на несколько часов позже полдня, и поэтому момент наступления полдня можно выяснить лишь после окончания дня.

Однако есть явление, чрезвычайно близкое к полдню, которое действительно можно наблюдать, — это *кульминация* Солнца, то есть момент прохождения Солнца через меридиан данного места. Так, для жителей умеренных поясов Солнце каждый день восходит в восточной части горизонта, поднимается над ним, кульминирует, проходя через меридиан, затем начинает снижаться и заходит в западной части горизонта.

Кульминации светил наблюдают с помощью специальных инструментов, называемых *пассажными*. Их основным элементом является зрительная труба, которая может вращаться лишь по высоте вокруг горизонтальной оси, направленной с востока на запад. Такая труба всегда смотрит в плоскости меридиана (рис. 1). Для удобства наблюдателя трубу иногда делают ломаной, посылая свет после отражения в горизонтальном направлении через полую ось вращения, на конце которой находится окуляр (рис. 2). Благодаря этому глаз наблюдателя всегда остается в неизменном положении и смотрит в горизонтальном направлении.

В поле зрения трубы натянуто несколько вертикальных тонких нитей, обычно паутиновых: средняя нить задает направление меридиана. Придав трубе нужный наклон, наблюда-

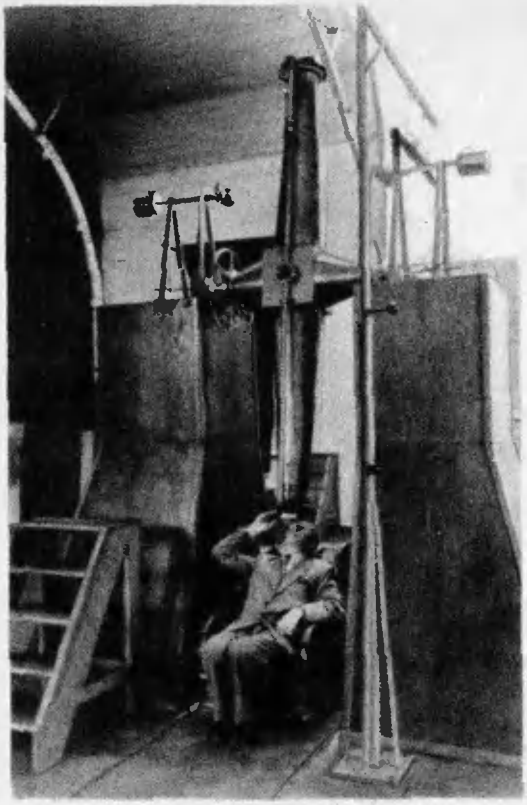


Рис. 1. Большой пассажный инструмент Пулковской обсерватории.

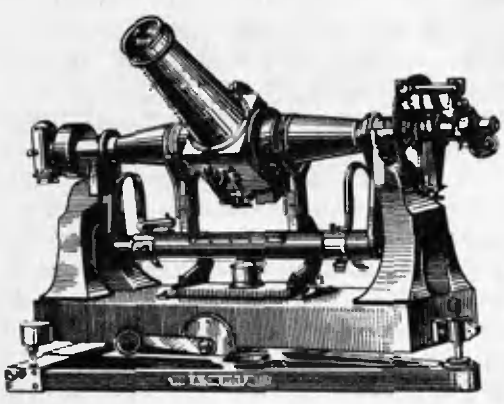


Рис. 2. Пассажный инструмент с ломаной трубой.

тель выжидает, когда наблюдаемое светило, в данном случае Солнце, войдет в поле зрения и пересечет среднюю нить. В этот момент он нажимает кнопку, замыкающую контакт, и перо самописца, называемого *хронографом*, делает на бегущей бумажной ленте отметку параллельно с секундными метками от часов. Таким образом момент прохождения светила через меридиан может быть зафиксирован с точностью до сотых долей секунды. (У Солнца центр ничем не обозначен, поэтому наблюдают прохождение двух его краев и затем полученные результаты усредняют.)

Описанный способ в сильной степени связан с быстротой реакции наблюдателя. Сейчас он значительно усовершенствован, вплоть до автоматической записи момента кульминации: свет от Солнца попадает через узкую щель на фотоэлемент, последний посылает сигнал на хронограф.

Допустим, что мы несколько дней подряд по хорошим часам наблюдали кульминацию Солнца и получили такие результаты:

1979 январь	1	12	ч	3	мин	16	с
»	2	12	»	3	»	44	»
»	3	12	»	4	»	12	»
»	4	12	»	4	»	40	»

и т. д. Очевидно, мы должны были бы прийти к заключению, что наши часы спешат на 28 секунд в сутки, и были бы склонны переставить регулятор для замедления их хода. Но вот, не трогая часов, мы через пару месяцев вновь пронаблюдали Солнце и обнаружили следующее:

1979 март	1	12	ч	12	мин	31	с
»	2	12	»	12	»	19	»
»	3	12	»	12	»	7	»
»	4	12	»	11	»	55	».

Теперь, казалось бы, часы отстают на 12 секунд в сутки. В чем же дело?

В действительности во всем виноваты не часы, а неравномерность видимого движения Солнца по эклиптике. Точнее — эллиптичность земной орбиты, вследствие чего (согласно второму закону Кеплера) Земля движется быстрее всего близ перигелия, проходя в сутки дугу в 1°1′10″, что бывает ежегодно около 2 января, и медленнее всего близ афелия, около 5 июля, когда эта дуга сокращается до 0°57′12″. Кроме того, имеется еще другая, слабее влияющая, причина несовпадения моментов кульминации Солнца. Она состоит в том, что одинаковые участки эклиптики в проекции на плоскость экватора дают не-

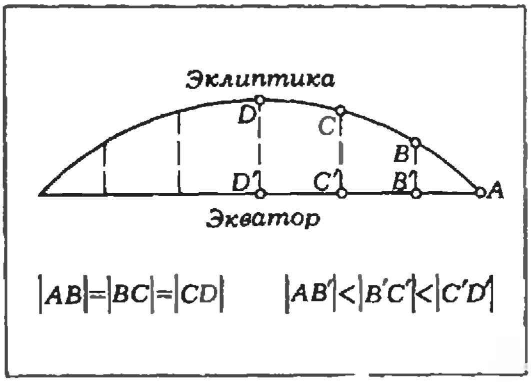


Рис. 3. Равновеликие отрезки эклиптики в проекции на экватор дают неравные части.

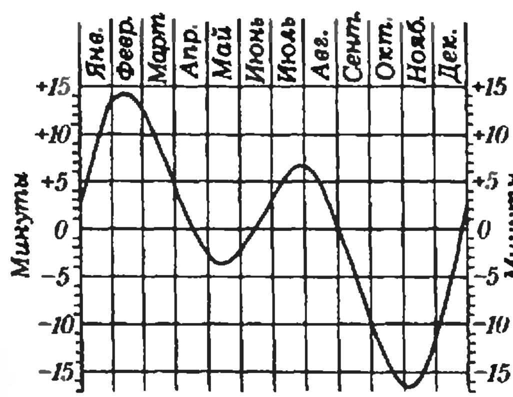


Рис. 4. График уравнения времени.

равные отрезки — наиболее короткие вблизи равноденствий (рис. 3).

Таким образом, оказалось, что время, задаваемое видимым движением Солнца, получившее название *истинного солнечного времени*, течет неравномерно и для точного употребления не годится. Поэтому пришлось ввести новое понятие — *среднее солнечное время*, в основу которого положена средняя продолжительность истинных солнечных суток за целый год. Иначе можно сказать, что среднее солнечное время задается воображаемой точкой, называемой *средним солнцем*, которая равномерно движется по небесному экватору, совершая один оборот в течение года.

Разность между средним и истинным солнечным временем называют *уравнением времени*. В течение года уравнение времени колеблется между +14,3 мин (в середине февраля) и —16,4 мин (в начале ноября), четыре раза проходя через нуль (около 16 апреля, 14 июня, 2 сентября и 25 декабря). График изменения уравнения времени показан на рисунке 4. Например, в течение декабря уравнение времени быстро изменяется в положительную сторону, что вызывает прогрессивное запаздывание полдня изо дня в день. То же происходит с восходом и заходом Солнца. Поэтому, когда после 22 декабря продолжительность дня начинает медленно увеличиваться, это увеличение полностью падает на вечер, а утро еще несколько дней продолжает запаздывать. Так, в Москве самый поздний восход Солнца бывает около 30 декабря, а самый ранний заход — около 15 декабря.

Истинное солнечное время определяется по солнечным часам (рис. 5). В них тень от стержня, параллельного оси вращения Земли, или косого ребра вертикальной пластинки падает на горизонтальный, вертикальный или наклонный циферблат с делениями, зависящими от его ориентировки. Если к показанию таких часов прибавить уравнение времени, получится среднее солнечное время. Когда часы, идущие по такому времени, показывают 12 часов, наступает *местный средний полдень*. Мы говорим «местный», потому что в разных местах полдень бывает не одновременно (он зависит от географической долготы данного места).

В старину каждый город жил по своему местному времени, так что, например, в Москве часы показывали всегда на 29 минут больше, чем в Петербурге. Это создавало большие неудобства и даже путаницу на транспорте и в междугородних сношениях. Поэтому было предложено ввести так называемое *поясное время*. Всюду в пределах одного часового пояса, границы которого разнятся по долготе примерно на 15°, время считается одинаковым; в соседних поясах время отличается на один час. За исходный, нулевой, пояс принят тот, посредине которого проходит гринвичский меридиан. Счет поясов идет от него к востоку, и номер пояса указывает, на сколько часов его время впереди гринвичского, называемого *всемирным*. Так, Москва и Ленинград находятся во втором поясе, и поэтому

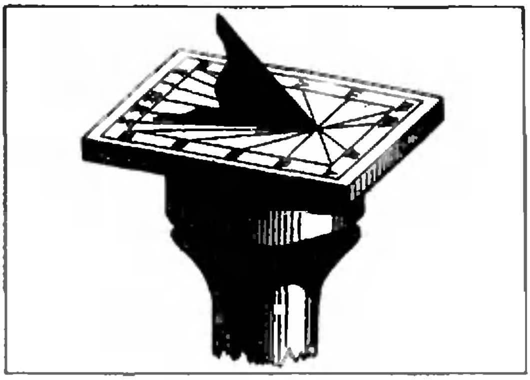


Рис. 5. Горизонтальные солнечные часы.

поясное время там ровно на два часа больше всемирного.

В СССР поясное время было введено в 1919 году, но в 1930 году, для экономии электроэнергии на освещение, к поясному времени был прибавлен один час; такое время стало называться *декретным*. В частности, декретное время второго часового пояса называется *московским*.

Таким образом, существует множество разных систем счета времени. Но для каждого события время, отсчитанное по одной системе, можно связать со временем по другим системам.

Для примера рассчитаем наступление местного истинного полдня. Согласно определению, этот полдень наступает в 12 часов истинного времени. По среднему времени это будет 12 часов плюс уравнение времени — η минут. Всемирного времени в этот момент будет на $1/15\ \lambda$ часов (или на $4\ \lambda$ минут) меньше. Здесь λ — восточная долгота данного места в градусах, а множитель при λ получается из расчета, что Земля поворачивается вокруг своей оси на 360 градусов за 24 часа, так что $1°$ соответствует $1/15$ ч (или 4 мин). Для получения поясного времени к найденному всемирному времени нужно прибавить n часов (или $60\ n$ минут), где n — номер часового пояса. Наконец, декретного времени будет на 1 ч (или на 60 минут) больше. Таким образом, истинный полдень в данном месте наступает по декретному времени в момент

$$t = 12\text{ ч} + \eta\text{ мин} - 1/15\ \lambda\text{ ч} + (n+1)\text{ ч}.$$

В этой формуле переменным является только уравнение времени η, зависящее от даты; из года в год оно повторяется с небольшими флуктуациями, связанными с неполным совпадением продолжительности календарного года с годом природы (тропическим годом), равным 365, 2422 суток.

Найдем, например, время наступления истинного полдня в Москве 1 января 1979 года. По географической карте найдем долготу Москвы: $\lambda = 37{,}5°$. Номер пояса для Москвы $n = 2$, уравнение времени $\eta = 3$ мин (см. рис. 4). Тогда искомый момент

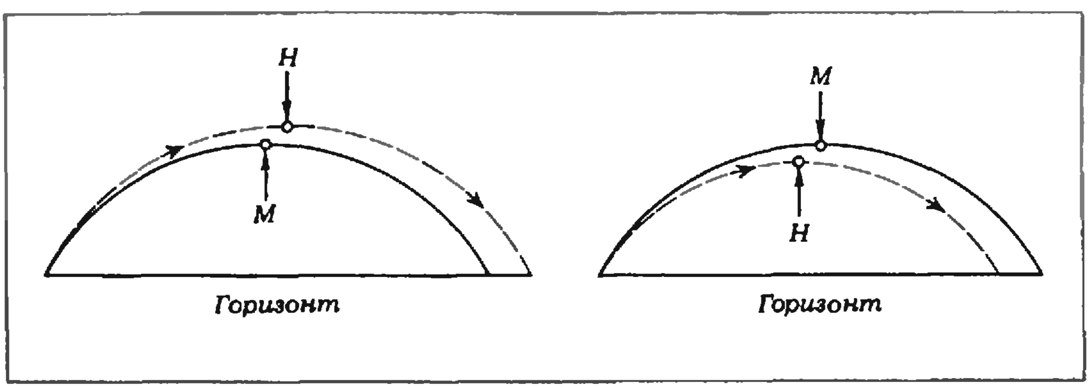


Рис. 6. Различия между прохождением Солнца через меридиан и наибольшей высотой Солнца над горизонтом. Сплошная кривая изображает дневную дугу Солнца с неизменным склонением. Штриховая линия изображает дневную дугу светила с возрастающим склонением весной и с убывающим склонением осенью. M — точка меридиана, H — точка наибольшей высоты.

равен

$$t = 12\text{ ч} + 3\text{ мин} - \frac{1}{15}\,37{,}5\text{ ч} + 3\text{ ч} =$$

$$= 12\text{ ч } 33\text{ мин}$$ декретного времени.

Мы произвели этот подсчет с точностью до минуты, но можно рассчитать и до секунды, взяв для этого с соответствующей точностью уравнение времени и долготу.

Обсудим еще один любопытный вопрос. Обычно считается, что в момент истинного полдня, когда Солнце проходит через меридиан данного места, высота Солнца над горизонтом бывает наибольшей, откуда и происходит слово «кульминация» (от латинского culmen — вершина). Это было бы действительно так, если бы склонение Солнца в течение дня оставалось неизменным, как это бывает во время зимнего и летнего солнцестояний. Однако в другое время склонение изменяется, быстрее всего увеличиваясь вблизи весеннего равноденствия (до 1′ в час) и уменьшаясь вблизи осеннего равноденствия. Поэтому происходит явление, поясненное на рисунке 6. Допустим, в какой-то день весны Солнце прошло через меридиан и, вследствие видимого суточного движения, начинает понижаться к горизонту. Однако увеличение склонения еще в течение нескольких секунд пересиливает это снижение, так что наибольшая высота Солнца наступает позже прохождения через меридиан. Обратное явление бывает осенью, когда вследствие уменьшения склонения наибольшая высота наступает немного раньше прохождения Солнца через меридиан. На широте Москвы, например, такая разность во время равноденствий достигает 22 секунд.

В заключение, во избежание недоразумения, заметим следующее. Хотя мы и говорим об истинном, среднем, поясном, декретном временах, по существу эти слова относятся лишь к способу измерения времени. Само же время, конечно, течет независимо от того, какой меркой мы его измеряем. Вообще, для измерения времени обычно пользуются каким-либо периодическим процессом, например, колебаниями маятника. Природа дала нам достаточно равномерное для большинства целей периодическое движение — вращение Земли, лежащее в основе всей нашей практики измерения времени, определяющее смену дня и ночи. Правильнее было бы говорить не об истинном или среднем времени, а об измерении времени с помощью движения истинного или среднего Солнца. Но исторически сложилась более краткая, хотя и неправильная терминология, к которой мы так привыкли, что не обращаем внимания на ее неправильность.

Задачи наших читателей

Найдите суммы первых n членов:

1 $1+101+10101+1010101+\ldots$

2. $3+3003+3003003+3003003003+\ldots$

3. $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+4\cdot5+\ldots$

4. $1\cdot5+2\cdot7+3\cdot9+4\cdot11+\ldots$

5. $11\cdot13+13\cdot15+1517+17\cdot19+\ldots$

6. $1\cdot3+2\cdot13+3\cdot23+4\cdot33+\ldots$

8. $19\cdot21+30\cdot28+41\cdot35+\ldots$

Сделать это вам помогут следующие две задачи.

Задача 1. Даны арифметическая прогрессия $a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots$ и геометрическая прогрессия $b,\ bq,\ bg^2,\ \ldots$ Найдите сумму

$$S=ab+(a+d)bq+(a+2d)bq^2+\ldots+([a+(n-1)d]bq^{n-1}$$

(рассмотрите отдельно случаи $q=1$ и $q\neq1$).

Задача 2. Пусть есть две арифметические прогрессии:

$$a,\ a+d_1,\ a+2d_1,\ \ldots$$

и

$$b,\ b+d_2,\ b+2d_2,\ \ldots$$

Найдите сумму

$$\Sigma=ab+(a+d_1)(b+d_2)+(a+2d_1)(b+2d_2)+\ldots+[a+(n-1)d_1]\times[b+(n-1)d_2].$$

М. Апресян

М. Дагаев

Исчезновение кольца Сатурна

В марте 1610 года Галилей опубликовал небольшую книгу «Звездный вестник», в которой сообщил о своих первых астрономических открытиях. Там же им была помещена анаграмма*) — зашифрованное сообщение в виде хаотического набора латинских букв. В те времена ученые часто прибегали к анаграммам для охраны и доказательств своего приоритета в открытиях. Они составляли на латинском языке короткую фразу о сущности предполагаемого открытия, переставляли в ней буквы и вместо научного сообщения публиковали бессмысленный набор этих букв. Непосвященному было невозможно из опубликованных букв составить первоначальную фразу, а автор анаграммы, убедившись в реальности своего открытия, публиковал расшифровку анаграммы и тем самым подтверждал свой приоритет.

Прочитав анаграмму Галилея, Кеплер затратил немало труда на ее расшифровку. В конце концов Кеплер решил, что анаграммой Галилей сообщает об открытии двух спутников Марса. (К этому решению он пришел, видимо, под впечатлением восхитившего его открытия Галилеем четырех спутников Юпитера.) Выбросив из анаграммы Галилея три буквы, Кеплер составил на латинском языке фразу: «Привет вам, близнецы, Марса порожденье».

Однако Кеплер ошибся. После тщательной проверки своего открытия Галилей в ноябре 1610 года сообщил Кеплеру дешифровку анаграммы: «Высочайшую планету тройною наблюдал».

В те времена высочайшей планетой называли Сатурн, самую далекую из известных тогда планет.

Почему Галилей назвал Сатурн тройной планетой? Потому, что в свой несовершенный телескоп, увеличивающий всего лишь в 33 раза да еще обладающий оптическими недостатками, Галилей не сумел различить всего тонкого кольца Сатурна, а видел только его более светлые края, расположенные по обе стороны небольшого диска планеты. Через два года, к удивлению Галилея, оба боковых придатка планеты исчезли. Это исчезновение настолько раздосадовало ученого, что он вообще перестал наблюдать непонятную планету.

Лишь полвека спустя Гюйгенс, используя свои более мощные телескопы, решил загадку «боковых придатков» Сатурна. В 1656 году в брошюре с описанием обнаруженного им спутника Сатурна Гюйгенс поместил анаграмму об открытии кольца планеты и только через три года, убедившись в его реальности, опубликовал в книге «Система Сатурна» дешифровку анаграммы: «Кольцом окружен тонким, нигде не прикасающимся, к эклиптике наклоненным». В этой же книге Гюйгенс привел рисунки Сатурна с кольцом и без него.

И действительно, кольцо Сатурна при среднем диаметре в 276 тыс. км (в 2,3 раза превышающем диаметр планеты) имеет ничтожную толщину — не более 20 км. В телескопы даже средних размеров видно, что кольцо состоит из трех концентрических колец с промежутками между ними. Самым ярким является среднее кольцо, отделенное от внешнего кольца четким темным промежутком, называемым щелью Кассини (в честь первого директора Парижской об-

*) От греческих слов «ана» — пере и «грамма» — буква, т. е. перестановка букв.

серватории). Внутреннее темное кольцо часто именуется креповым, и его внутренний край сильно размыт.

В настоящую эпоху плоскость экватора и колец Сатурна наклонена к плоскости эклиптики (к плоскости земной орбиты) на 28°, и это наклонение сохраняется на протяжении длительного промежутка времени (за 100 лет наклонение уменьшается всего лишь на 47″). Таким образом, за период обращения Сатурна вокруг Солнца, равный 29,5 земного года, плоскость экватора и колец планеты сохраняет свое направление в пространстве, подобно тому как сохраняется направление земной оси вращения и плоскости земного экватора при годовом обращении Земли. Поэтому регулярно, через каждый 14,7 земного года (промежутки времени, равные половине периода обращения Сатурна) кольца планеты обращены к Земле ребром и из-за их ничтожной толщины не видны. Лишь узкая полоска тени от кольца может быть заметна на диске планеты. Кольца становятся также невидимыми, когда их плоскость направлена к Солнцу.

Это явление, называемое в астрономии исчезновением колец Сатурна, произойдет осенью 1979 — весной 1980 года. Уже с начала утренней видимости планеты, наступающей в сентябре 1979 года, и до июня 1980 года кольцо Сатурна не будет видно. Лишь в декабре, январе и мае в телескопы с не менее чем восьмидесятикратным увеличением можно будет заметить кольцо в виде чрезвычайно тонкой светлой полоски.

Исчезновение кольца Сатурна наблюдается очень редко, и мы очень советуем всем, кто интересуется астрономией, регулярно наблюдать эту планету на протяжении почти всего учебного года.

Электрическая цепь извлекает квадратные корни

В «Сборнике вопросов и задач по физике» под редакцией Н. Гольдфарба приводится следующая задача: *составлена электрическая цепь из бесконечного числа ячеек, состоящих из трех одинаковых сопротивлений* r (рис. 1). *Найти сопротивление этой цепи.*

Для решения сосчитаем сначала сопротивление R_1 первой ячейки (разомкнув клеммы K_1, L_1). Очевидно, $R_1=3r$. Замкнув снова клеммы K_1, L_1 и разомкнув клеммы K_2, L_2, найдем сопротивление R_2 двух ячеек:

$$R_2=2r+\frac{rR_1}{r+R_1}.$$

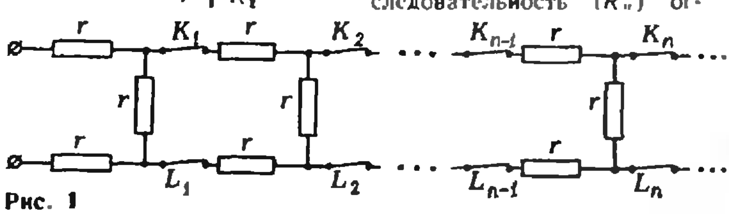


Рис. 1

Аналогично,

$$R_3=2r+\frac{rR_2}{r+R_2},\ \ldots,$$

$$R_n=2r+\frac{rR_{n-1}}{r+R_{n-1}},$$

где R_n — сопротивление цепи при разомкнутых клеммах K_n, L_n, n=1, 2, 3, ... (рис. 1). Для бесконечной цепочки мы получим

$$R_\infty=2r+\frac{rR_\infty}{r+R_\infty}.$$

Решим это уравнение относительно R_∞:

$$R_\infty=r(1+\sqrt{3}).$$

Для того чтобы это рассуждение было корректным, необходимо доказать с у щ е с т в о в а н и е п р е д е л а $\lim R_n=R_\infty$. Но при наших предположениях это следует из теоремы Вейерштрасса («Алгебра и начала анализа 9» п. 32): действительно, последовательность (R_n) ограничена снизу (числом $(1+\sqrt{3})\,r$) и монотонно убывает (проверьте!).

Из полученного ответа видно, что эта схема позволяет вычислить значение $\sqrt{3}$, измерив сопротивление цепочки при достаточно большом числе ячеек.

Положив величину сопротивления в перемычках равной $2r$, получим

$$R_\infty=r(1+\sqrt{5}).$$

Для значения $3r$

$$R_\infty=r(1+\sqrt{7}),$$

для значения nr (n — любое натуральное число)

$$R_\infty=r(1+\sqrt{2n+1}).$$

Наша цепь «извлекает корень» из любого нечетного числа!

Можно показать, что *для любого вещественного числа* $a\geqslant 1$ *можно так подобрать сопротивление на перемычках, чтобы сопротивление бесконечной цепи равнялось* $r(1+\sqrt{a})$.

Это утверждение мы оставляем читателю в качестве задачи.

Н. Дмитриев,
В. Ивлев

В. Майер

Модели смерча

Смерч — одно из самых грандиозных и загадочных явлений природы. Энергия его настолько велика, что почти никто и ничто не может выдержать схватку со смерчем.

Каким образом смерч переносит тяжелые предметы порой на весьма значительные расстояния? Как он образуется? На эти и многие другие вопросы современная наука не в состоянии дать исчерпывающих ответов.

На страницах нашего журнала рассказывалось о природных смерчах (см. статью Л. Алексеевой «Вихри, которые «делают погоду» — «Квант», 1977, № 8). Можно ли воссоздать смерч в лабораторных условиях? Предлагаем вам две экспериментальные установки, с помощью которых водяные модели смерча нетрудно получить даже в домашних условиях.

1. К валу микроэлектродвигателя типа ДП-12а (он используется во многих детских игрушках) припаяйте диск из латуни или жести диаметром 40 мм и толщиной 0,5—1 мм. Диск нужно укрепить строго перпендикулярно валу, чтобы при его вращении не возникали биения. Для герметизации двигателя подшипники, в которых вращается вал, смажьте солидолом или густым вазелином, а контакты двигателя, к которым припаяны проводники, покройте слоем пластилина.

На дно стакана (или стеклянной банки) диаметром 9 см и высотой 18 см прилепите пластилиновую лепешку толщиной около 5 мм, на ней укрепите микроэлектродвигатель так, чтобы его вал снизу не касался пластилина. Проводники, идущие от двигателя, закрепите на стенке стакана липкой лентой или пластилином. На рисунке 1 показана установка, готовая к проведению экспериментов.

Налейте в стакан воду, а поверх нее — слой подсолнечного масла толщиной 1—2 см. Подсоедините выводы микроэлектродвигателя к батарейке для карманного фонаря — диск начнет вращаться, при этом жидкость в стакане тоже придет во вращательное движение. Через некоторое время граница раздела между водой и маслом начнет прогибаться вниз, появится заполненная маслом воронка, ко-

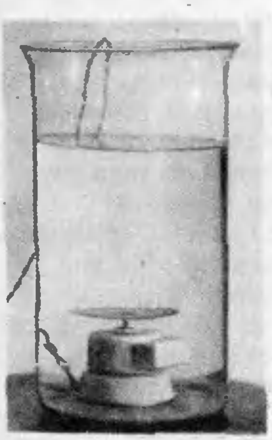


Рис 1.

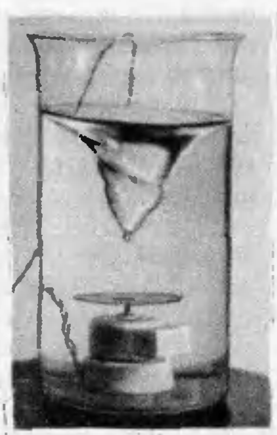


Рис. 2.

Рис. 3.

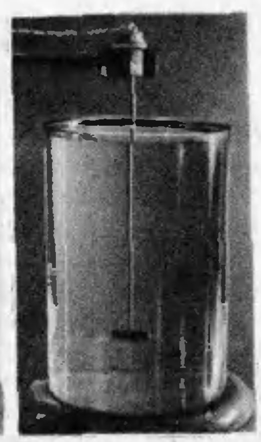


Рис. 4.

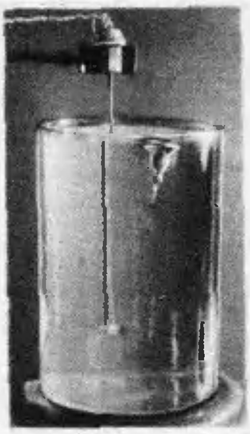


Рис. 5.

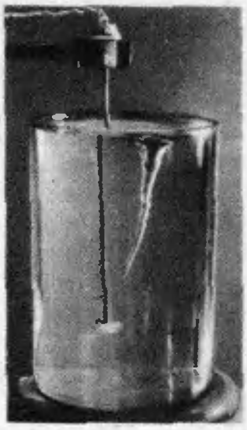


Рис. 6.

Рис. 7.

Рис. 8.

торая будет расти до тех пор, пока не коснется диска. В этот момент диск разобьет масло на капли, и жидкость в стакане помутнеет. После выключения двигателя капли масла всплывут вверх, вновь образуя сплошной слой на поверхности воды. Опыт можно повторить снова.

На рисунках 2, 3 приведены фотографии, на которых показан процесс образования воздушной воронки в несколько ином эксперименте, когда в стакан была налита только одна вода.

2. Еще более похожее на настоящий смерч явление можно наблюдать во время такого опыта.

К валу микроэлектродвигателя припаяйте медную проволоку длиной около 25 см и диаметром 2 мм (можно использовать вязальную спицу). К концу проволоки, перпендикулярно к ней, припаяйте прямоугольную пластинку из латуни или жести размером $0{,}5\times10\times25$ мм (рис. 4). Включив двигатель, проверьте, как работает изготовленная вами вертушка. Если возникнет необходимость, выправьте удлиненный вал (проволоку) так, чтобы при вращении биения были минимальными.

Опустите вертушку вертикально вниз в банку с водой диаметром 15—20 см и высотой 25—30 см и включите питание. Вы увидите постепенное образование воронки на поверхности воды и рост смерча по направлению к вращающейся пластинке (рис. 5—7). Когда смерч своим нижним концом коснется вертушки, образуется множество воздушных пузырьков, обозначающих вихрь вокруг вертушки.

Если держать двигатель рукой, смерч будет вести себя совсем как живой. Можно часами наблюдать за «хищными» движениями его конца.

Продолжите эксперимент. Положите на поверхность воды деревянный кубик — он будет втянут смерчем! Попробуйте подобрать скорость вращения вертушки так, чтобы кубик, вращаясь в воронке, длительное время оставался на одной и той же глубине под поверхностью воды. Точно так же смерч будет втягивать и тела, плотность которых больше плотности воды (в отличие от деревянного кубика) и которые до образования смерча лежали на дне банки.

Расположите двигатель так, чтобы его вал с вертушкой находился на оси банки. Вы обнаружите воронку, сползающую вниз по валу, а под вертушкой — продолжение этой воронки, обозначенное воздушными пузырьками (рис. 8). Поместив на дно банки хорошо промытый речной песок, вы сможете наблюдать структуру смерча под вертушкой.

Предлагаемые опыты показывают, что причиной образования смерча всегда является вихрь в жидкости или газе.

А. Ширшов

Об одной комбинаторной задаче

Как вы хорошо знаете, обычное умножение ассоциативно: $(ab)\,c=a\,(bc)$ для любых чисел. Ассоциативно и умножение функций: $(f(x)\,g(x))\,z(x)=f(x)\,(g(x)\,z(x))$.

Однако в ряде разделов математики рассматриваются неассоциативные «умножения». Если умножение неассоциативно, приходится пользоваться скобками, чтобы указать порядок действий, подобно тому, как приходится ими пользоваться в школьных примерах, содержащих сложение и умножение или деление.

Рассмотрим слово $a_1a_2a_3\ldots a_n$. Сколькими способами можно расставить в нем скобки, чтобы можно было вычислить неассоциативное «произведение» этих «букв»? Обозначим число таких способов через $\varphi(n)$. Ясно, что $\varphi(1)=1$ и $\varphi(2)=1$. Для трехбуквенного слова $a_1a_2a_3$ возможны две «хорошие» расстановки скобок: $(a_1a_2)\,a_3$ и $a_1\,(a_2a_3)$. Для четырехбуквенного — таких расстановок пять: $a_1(a_2(a_3a_4))$, $a_1((a_2a_3)\,a_4)$, $(a_1a_2)(a_3a_4)$, $((a_1a_2)\ a_3)\ a_4$ и $(a_1(a_2a_3))\,a_4$. Поэтому $\varphi(3)=2$, $\varphi(4)=5$. (Покажите самостоятельно, что $\varphi(5)=14$, $\varphi(6)=42$.)

Числа $\varphi(n)$ называются *числами Каталана*. В «Кванте» № 7 за 1978 год подробно рассказывалось об этих числах. Упомянуто там и о связи между этими числами и расстановками скобок. В этой заметке я хочу привести простое доказательство следующей формулы для чисел Каталана:

$$\varphi(n)=\frac{1}{2n-1}C_{2n-1}^{n-1}. \qquad (*)$$

(Из этой формулы следует, что число $\frac{1}{2n-1}C_{2n-1}^{n-1}$ — целое при всех n.)

Для начала мне нужно ввести понятие циклически сравнимых слов. Проще начать с примера. Из символов a_1, a_2, a_3, взятых по одному, можно образовать два класса циклически сравнимых слов:

$$\{a_1a_2a_3, a_2a_3a_1, a_3a_1a_2\}$$

и

$$\{a_1a_3a_2, a_3a_2a_1, a_2a_1a_3.\}$$

Чтобы получить эти классы, нужно символы a_1, a_2, a_3 написать по кругу, как на циферблате часов, а затем начинать запись по часовой стрелке с любого из символов.

Дадим теперь точное определение. Два слова A и B называются *циклически сравнимыми*, если

$$A=b_1b_2\ldots\ b_kb_{k+1}\ldots b_n,$$
$$B=b_kb_{k+1}\ldots b_nb_1b_2\ldots b_{k-1}.$$

Поступим теперь следующим образом. Каждому неассоциативному слову (так мы будем называть слова с правильно расставленными скобками) из символов a_1, a_2, ..., a_n поставим в соответствие ассоциативное слово (то есть слово без скобок) из символов a_1, ..., a_n, p по следующему правилу: $a_i\to a_i$ и, если $u\to A$, $v\to B$, то $u\cdot v\to ABp$. Например, $a_1a_2\to a_1a_2p$,

$$(a_1a_2)\ a_3\to a_1a_2pa_3p,$$
$$a_1(a_2a_3)\to a_1a_2a_3pp,$$
$$a_1((a_2a_3)\ a_4)\to a_1a_2a_3pa_4pp,$$
$$(a_1a_2)(a_3a_4)\to a_1a_2pa_3a_4pp.$$

Легко понять, что каждому неассоциативному слову длины k от символов a_i соответствует некоторое ассоциативное слово длины $2k-1$, в которое p входит $k-1$ раз. Обратное, конечно, неверно. Например, слова $ppa_1a_2a_3$ или $a_1pa_2a_3p$ не могут быть получены с помощью описанной процедуры. Однако справедливо следующее утверждение:

Лемма. *Пусть A — некоторое ассоциативное слово длины $2n-1$, со-*

держащее каждый из символов $a_i (i=1, 2, \ldots, n)$ по одному разу и символ p $n-1$ раз. Тогда существует одно и только одно циклически сравнимое со словом A (возможно, оно само) ассоциативное слово, которое соответствует некоторому неассоциативному слову длины n из символов $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

По своему характеру эта лемма сродни многим простым задачам, публиковавшимся в «Кванте». Я приведу ее доказательство лишь для полноты изложения.

Очевидно, в классе циклически сравнимых с A слов имеет смысл рассматривать лишь те, которые не начинаются с символа p, но кончаются символом p. Такие, конечно, существуют. В таком A_1 — это тоже легко понять — найдется подслово (часть слова) вида $a_i a_j p$, соответствующее неассоциативному слову $a_i a_j$. Обозначим этот кусочек слова A_1 через $\bar{a}_i$. Мы получили слово, в которое входят $a_1, a_2, \ldots, \bar{a}_i, \ldots, a_n$, не входит a_j, а символ p входит уже в количестве $n-2$ раз. Из простой индукции по числу n и следует доказательство леммы.

Основанием для индукции является рассмотрение слов типа $a_1 a_2 p$ или аналогичных.

Итак, лемма доказана. Теперь формула (•) становится почти очевидной. В самом деле, среди $2n-1$ мест мы можем в точности C_{2n-1}^{n-1} способами выбрать расстановку $n-1$ символа p, а на оставшиеся места расставить символы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таким образом, чтобы в циклически сравнимом «хорошем» ассоциативном слове индексы у a_i шли в порядке их последовательного возрастания от 1 до n. Так как в каждом классе циклически сравнимых слов длины $2n-1$ окажется ровно $2n-1$ различных (почему?) элементов, $\varphi(n)=\frac{1}{2n-1}C_{2n-1}^{n-1}$.

Формула (•) доказана.

• • •

В заключение я хочу рассказать об интересной истории, происшедшей с этой задачей.

Популярный американский математический журнал «The American Mathematical Monthly» (для краткости AMM) в 1935 году опубликовал проблему известного математика Г. Биркгофа (№ 3674) в следующей формулировке:

Показать, что для всякого положительного целого k выражение $\varphi(k)=\frac{1}{2k-1}C_{2k-1}^{k-1}$ есть целое число; доказать справедливость рекуррентного соотношения

$$\varphi(k)=\varphi(1)\,\varphi(k-1)+\varphi(2)\,\varphi(k-2)+\ldots+\varphi(k-1)\varphi(1).$$

Легко понять, что Г. Биркгоф, занимаясь близкими вопросами, пришел к формуле (•) эмпирически. Рекуррентное же соотношение, при ближайшем рассмотрении, очевидно.

Эта проблема была решена с помощью достаточно сильных средств математического анализа в октябре 1935 года

Поэтому мне показалось весьма странным в том же журнале за 1941 г. увидеть напечатанной проблему (№ 3954) другого хорошо известного математика О. Оре:

Из трех элементов a, b, c, заданных в указанном порядке, можно составить $\varphi(3)=2$ произведения $(ab)c$ и $a(bc)$, если не считать, что закон ассоциативности имеет место. Аналогично, из четырех элементов a, b, c, d можно составить $\varphi(4)=5$ произведений

$$[(ab)c]d,\quad [a(bc)]d,\quad a[(bc)d],\quad a[b(cd)],\quad (ab)(cd).$$

Найти общее выражение $\varphi(n)$ для n множителей.

В такой формулировке эта задача была решена в том же 1941 г. Я с решением не знакомился, так как оно очевидно вытекало из простой ссылки на предыдущую задачу.

Но вот что интересно. В 1957 году редакция AMM решила посвятить отдельный номер журнала памяти О. Данкела, руководившего много лет отделом проблем. Жюри, составленное из 25 известных математиков США, должно было путем голосования выделить 400 особо интересных проблем из числа напечатанных в этом журнале для включения их в соответствующий выпуск. К моему удивлению, обе эти задачи, независимо, оказались среди выбранных.

(Окончание см. на с. 32)

Премии «Кванта»

В 1978/79 учебном году редакция получила более 12 тысяч писем с решениями задач из Задачника «Кванта». Школьники, решившие наибольшее число задач или приславшие наиболее оригинальные решения, награждаются специальной премией, учрежденной редакционной коллегией журнала,— подпиской на «Квант» на 1980 год:

1. АГАЕВ Ализамин (с. Покровка АзССР)
2. БАЛИНСКИЙ Александр (с. Дубляны Львовской обл.)
3. ДАНИЛОВСКИЙ Игорь (г. Горький)
4. ДРЕМИН Алексей (п. Черноголовка Московской обл.)
5. ЕРМОЛИН Александр (г. Петрозаводск)
6. ЖИТЕНЕВ Николай (п. Черноголовка Московской обл.)
7. ЖОРДОЧКИН Валерий (г. Орск)
8. КАПЛАН Алексей (г. Сумгаит)
9. КЕЛАРЕВ Андрей (г. Свердловск)
10. КОГАН Евгений (г. Днепропетровск)
11. ЛЯПИН Александр (г. Гомель)
12. МОЛЧАНОВ Георгий (г. Саратов)
13. СЕРЕДА Владимир (г. Львов)
14. СИВАЦКИЙ Александр (г. Ленинград)
15. СТРЕШИНСКИЙ Михаил (г. Донецк)
16. ШИШКОВ Сергей (г. Москва)

За успешное участие в XIII Всесоюзной физико-математической олимпиаде подпиской на «Квант» на 1980 год награждаются:

1. АЙДАГУМОВ Валерий (г. Андижан)
2. АШЫРАЛЫЕВ Чарияр (г. Кара-Кала Туркм. ССР)
3. БАБАК Александр (п. Каменка)
4. ВАХРИН Сергей (с. Бобровка Павлодарской обл.)
5. КУДРЯВЦЕВ Сергей (г. Магадан)
6. ЛЕВИЦКИЙ Константин (г. Кара-Балты Кирг. ССР)
7. МЕСАБЛИШВИЛИ Бачук (г. Тбилиси)
8. ОСТАПЧУК Юрий (г. Здолбунов)
9. ПАВЛИАШВИЛИ Георгий (г. Тбилиси)
10. САТАФОВА Лола (г. Душанбе)
11. ФЕФИЛОВ Константин (г. Поставы)
12. ХОХЛОВ Юрий (г. Эмба)
13. ШУМКО Сергей (г. Лодейное Поле)

За активное участие в олимпиаде, способствовавшее ее отличному проведению, подпиской на «Квант» на 1980 год награждаются:

1. Организатор первых грузинских олимпиад С. ВАШАКМАДЗЕ
2. Председатель жюри олимпиады член-корр. АН ГССР Т. ГЕГЕЛИЯ
3. Физико-математическая школа-интернат им. Комарова г. Тбилиси (директор школы А. ЦХАДАЯ)
4. Директор школы № 42 г. Тбилиси, заслуженный учитель ГССР О. ГАГАНИДЗЕ
5. Учитель школы № 42 г. Тбилиси Р. МОШАШВИЛИ

Задачник Кванта

Задачи

M581 — M585; Ф593— Ф597

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 ноября 1979 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 9—79» и номера задач, решения которых вы посылаете, например, «М581, М582» или «Ф593». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этот конверте вы получите результаты проверки решений). Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации (или цикла задач), присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М581. а) Существует ли трехзначное число, куб которого оканчивается на три семерки?
б) Для любого ли набора цифр, последняя из которых — не 0, существует куб, оканчивающийся этим набором цифр?

А. Броцкий

М582. В окружность с центром O вписан четырехугольник со взаимно перпендикулярными диагоналями. Докажите, что расстояние от точки O до каждой его стороны равно половине длины противоположной стороны.

А. Келарев

М583. Рассматриваются наборы камней, масса каждого из которых не больше 2 кг, а общая масса набора — 50 кг. Из такого набора выбирается несколько камней, суммарная масса которых отличается от 10 кг на наименьшее возможное для данного набора число D. Какое наибольшее значение может принимать число D для всевозможных наборов камней?

А. Вайнтроб, А. Печковский

М584. Можно ли представить все пространство в виде объединения прямых, каждые две из которых — скрещивающиеся (то есть не лежат в одной плоскости)?

Ф. Вайнштейн

М585. На химической конференции присутствовало N ученых — химиков и алхимиков, причем химиков было больше, чем алхимиков. Известно, что на любой вопрос химики отвечают правду, а алхимики иногда говорят правду, иногда — лгут. Оказавшийся на конференции математик про каждого ученого должен установить, химик тот или алхимик. Для этого он любому ученому может задать вопрос: «Кем является такой-то — химиком или алхимиком?» (В частности: «Кто Вы?»). Докажите, что математик может выяснить все, что требуется

а) за $4N$ вопросов; б) за $2N-2$ вопроса;

в) * постарайтесь придумать способ, позволяющий установить, кто — химик, а кто — алхимик, за меньшее число вопросов (авторам известен довольно громоздкий способ, позволяющий сделать это за $[3N/2]$ вопросов).

С. Конягин, П. Блехер

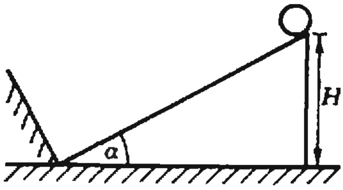


Рис. 1.

Ф593. Обруч радиуса r скатывается с высоты H ($r \ll H$) без проскальзывания по наклонной плоскости с углом α при основании и абсолютно упруго ударяется о гладкую стенку, перпендикулярную наклонной плоскости (рис. 1). На какую высоту поднимется обруч после удара, если коэффициент трения скольжения равен μ?

М. Бородовский

Ф594. Представьте себе, что вы находитесь в жарко натопленной бане, а за окном — мороз. Куда повалит пар, если вы откроете форточку?

А. Варламов

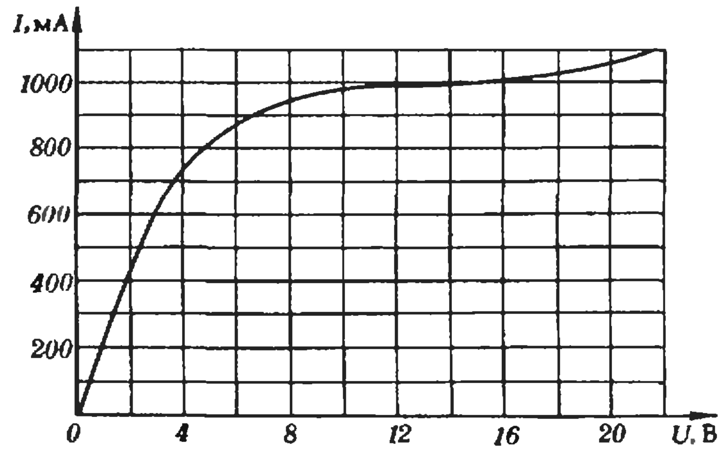


Рис. 2.

Ф595. На рисунке 2 изображена зависимость тока от напряжения для стабилизатора постоянного тока — барретора. Барретор подключен последовательно с нагрузочным сопротивлением $R = 13$ Ом к батарее с ЭДС $\mathcal{E} = 26$ В. В каких пределах может изменяться ЭДС батареи, если ток нагрузки не должен изменяться более чем на 50 мА?

С. Козел

Ф596. Промежуток времени между двумя последовательными затмениями спутника Юпитера Ио в течение года изменяется от минимального значения, равного 42 ч 28 мин 21,5 с, до максимального, равного 42 ч 28 мин 51,5 с. Пользуясь этими данными, определить скорость света, считая, что Земля движется вокруг Солнца по круговой орбите с радиусом 150 млн. км. Радиус орбиты Юпитера гораздо больше радиуса орбиты Земли, а скорость движения Юпитера гораздо меньше скорости движения Земли.

В. Белонучкин

Ф597. Магнетрон представляет собой двухэлектродную электронную лампу с цилиндрическим анодом радиуса r, вдоль оси которого расположена тонкая проволочка — катод. При нагревании катода он испускает электроны с энергией E. Магнетрон помещают в однородное магнитное поле, параллельное его оси. При каком значении индукции магнитного поля ток в анодной цепи станет равным нулю?

Решения задач

М528, М529; Ф538 — Ф541

М528. *На каждой клетке шахматной доски стоит по фишке. Фишки нужно переставить так, чтобы расстояние между каждой парой фишек не уменьшилось по сравнению с расстоянием между ними при первоначальном расположении. Сколькими способами это можно сделать? (Расстоянием между фишками считается расстояние между центрами клеток, которые они занимают.)*

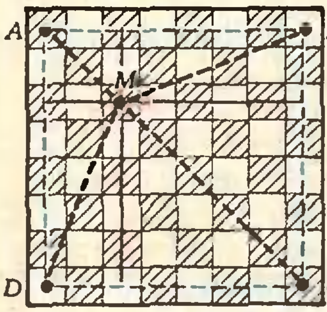


Рис. 1.

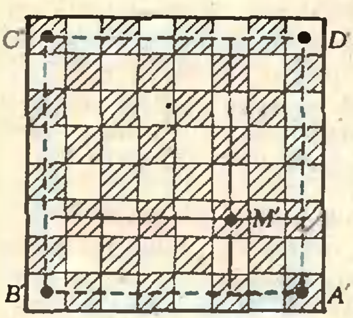


Рис. 2.

Докажем, прежде всего, что *требуемая перестановка фишек сохраняет расстояния между любыми двумя фишками*. Это можно сделать многими разными способами.

П е р в ы й с п о с о б. Сумма всех попарных расстояний между фишками не изменяется. Отсюда следует, что ни одно из расстояний не может увеличиться (действительно, если после перестановки фишек расстояние между какими-либо фишками увеличится, то, поскольку сумма всех расстояний постоянна, найдутся фишки, расстояние между которыми уменьшится, что противоречит условию перестановки).

В т о р о й с п о с о б. Угловые фишки A, B, C, D (рис. 1) по-прежнему должны остаться угловыми, поскольку расстояние от каждой из них до фишки в противоположном (по диагонали) углу не может измениться (это расстояние, равное длине диагонали доски, максимально: $|AC|=|BD|\geq|KL|$, где K и L — произвольные клетки доски). Итак, эти четыре фишки по-прежнему занимают четыре угла доски, причем их новые положения A', B', C', D' — по-прежнему четыре последовательные вершины квадрата (рис. 2). Тогда расстояния от фишки M до сторон квадрата $ABCD$ должны равняться расстояниям от ее образа — фишки M' — до соответствующих сторон квадрата $A'B'C'D'$: иначе бы расстояния от M до каких-то двух соседних сторон квадрата не увеличились, а одно из них — строго уменьшилось; но тогда расстояние до общей вершины этих сторон тоже должно было бы уменьшиться.

Из наших доказательств ясно, что нужная перестановка фишек определяет некоторое перемещение квадрата $ABCD$ на самого себя. Таких самосовмещений существует восемь (включая тождественное, при котором все точки остаются на месте): вершина A может попасть в любую из четырех других, а при этом вершина B — в одну из двух соседних с ней вершин.

Заметим, что основной результат задачи допускает такое красивое обобщение: *если f — непрерывное отображение замкнутого ограниченного множества* (на плоскости или в пространстве) *в себя, такое, что для любых двух точек M, N*

$$\rho\,(f\,(M),\ f\,(N))\geq\rho\,(M,\ N), \qquad (*)$$

то для любых двух точек M и N неравенство (*) *будет равенством*. Однако доказательство этого факта довольно сложно (см. Н. Б у р б а к и «Общая топология» (М., «Наука», 1975), задача 11 к § 2 главы IX).

Н. Васильев

◆

М529. *а) Многоугольник M' — образ выпуклого многоугольника M при гомотетии с коэффициентом $k=-1/2$. Докажите, что существует параллельный перенос T такой, что $T\,(M')\subset M$.*
б) При каких коэффициентах гомотетии $k<0$ верно аналогичное утверждение для выпуклого многогранника M в пространстве?

а). На первый взгляд в условии задачи есть неопределенность: не сказано, какой именно гомотетией получен многоугольник M'. Мы предлагаем читателю доказать о наших многоугольниках M, M' следующую л е м м у: *образ многоугольника M' при любом параллельном переносе может быть получен из M некоторой гомотетией с коэффициентом k (но с другим центром), и, наоборот, образ многоугольника M при произвольной гомотетии с коэффициентом k может быть получен из M некоторым параллельным переносом.*

Перейдем к решению. Выберем среди вершин многоугольника M три (скажем, A, B и C), образующие треугольник ABC наибольшей возможной площади (такие найдутся, так как у M — конечное число вершин). Пусть O — точка пересечения медиан треугольника ABC. Рассмотрим образ M'' многоугольника M при гомотетии Γ с центром O и коэффициентом $k=-1/2$ (рис. 3). Как мы

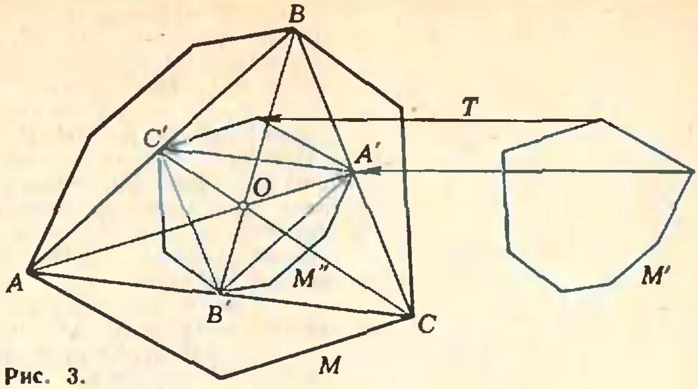


Рис. 3.

отметили, многоугольник M'' может быть получен из многоугольника M' параллельным переносом. Ясно, что если M'' окажется лежащим внутри треугольника ABC (и, тем более, внутри многоугольника M), то задача будет решена.

Рассмотрим треугольник $A'B'C'$, образованный средними линиями треугольника ABC. Поскольку $\Delta A'B'C' = \Gamma(\triangle ABC)$, точки A', B', C' являются вершинами многоугольника M'', причем треугольник $A'B'C'$ имеет максимальную площадь среди всех треугольников, образованных тремя вершинами многоугольника M''. Пусть теперь какая-нибудь вершина — скажем, X — многоугольника M'' оказалась вне треугольника ABC, например, по разные с ним стороны от $[AB]$ (рис. 4). Но тогда треугольник $XA'C'$, очевидно, лежащий внутри многоугольника M'', имел бы площадь, большую, чем треугольник ABC, что невозможно. Значит, $M'' \subset \triangle ABC$.

Задача а) решена.

б) Решение пункта б) задачи почти полностью повторяет изложенное выше. Прежде всего, если слово «многоугольник» заменить на «многогранник», то лемма останется справедливой. Далее, роль треугольника ABC (максимальной площади) будет играть тетраэдр $ABCD$, вершины которого являются вершинами многогранника M, а объем — максимальный среди объемов всех таких тетраэдров. Роль же центра гомотетии O прекрасно сыграет центр тяжести тетраэдра $ABCD$ (как известно, он делит отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с центрами тяжести противоположных граней, в отношении 1:3). Внимательный читатель, вероятно, уже догадался, что утверждение пункта б) будет верным, если положить $k = -1/3$. Так как, очевидно, оно тем более верно при $-\frac{1}{3} \leqslant k < 0$, для полного решения задачи остается показать, что уменьшить значение $k = -1/3$ нельзя. Чтобы доказать отрицание какого-либо утверждения, достаточно опровергнуть его в каком-нибудь частном случае. Опровергнем его, когда многогранник M — правильный тетраэдр.

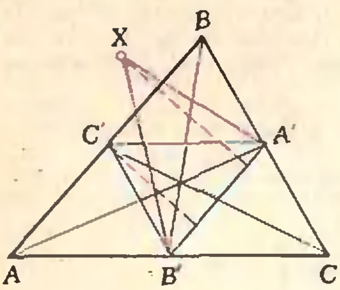


Рис. 4.

Для этого докажем следующее утверждение: *пусть $ABCD$ — правильный тетраэдр и $A'B'C'D'$ — его образ при гомотетии с коэффициентом $k' > -3$* (рис. 5; центр гомотетии, как мы видели, не играет роли); *тогда не существует параллельного переноса, при котором образ тетраэдра $ABCD$ лежал бы внутри тетраэдра $A'B'C'D'$.*

В самом деле, проведем через вершины тетраэдра $ABCD$ плоскости, параллельные противоположным граням тетраэдра (через вершину A — плоскость, параллельную грани BCD, и т. д.). Многогранник (обозначим его $A''B''C''D''$), образованный этими плоскостями, будет правильным тетраэдром, гомотетичным тетраэдру $ABCD$ с коэффициентом гомотетии $k'' = -3$ (центр гомотетии — в центре тяжести тетраэдра $ABCD$). Значит, этот новый тетраэдр «больше» тетраэдра $A'B'C'D'$ (хотя бы по объему)

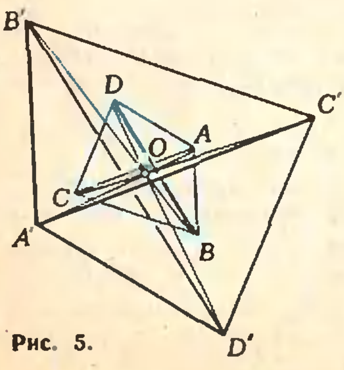


Рис. 5.

и потому не может быть «задвинут» в него никаким параллельным переносом. Допустим теперь, что существует параллельный перенос T такой, что $T(ABCD) \subset A'B'C'D'$. «Вдвинем» немного грани тетраэдра $A'B'C'D'$ «внутрь», оставляя их параллельными себе, вплоть до касания с вершинами образа тетраэдра $ABCD$ при параллельном переносе T (то есть — с вершинами тетраэдра $T(ABCD)$). Получающийся при этом тетраэдр, очевидно, конгруэнтен ранее построенному тетраэдру $A''B''C''D''$ («большему», чем тетраэдр $A'B'C'D'$) и лежит внутри тетраэдра $A'B'C'D'$, что невозможно. Значит, требуемого параллельного переноса не существует.

Заметим, что п р а в и л ь н о с т ь тетраэдра $ABCD$ нужна была лишь для наглядности.

Для многогранников же, отличных от тетраэдра, значение $k = -1/3$ может быть уменьшено; например, для центрально-симметричных выпуклых тел (не обязательно — многогранников) «минимальный» коэффициент гомотетии равен -1. Таким образом, г р а н и ч н ы й коэффициент гомотетии может служить мерой «несимметричности» выпуклого тела. Похожие вопросы разбираются в брошюре Б. Г р ю н б а у м а *«Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел»* (М., «Наука», 1971) и в книжке В. Г. Б о л т я н с к о г о и И. М. Я г л о м а *«Выпуклые фигуры»* (М. — Л., Гостехиздат, 1951).

Кроме вышеприведенного решения задачи а), нам известны еще два ее решения: первое — весьма простое, но использующее «трудную» *теорему Хелли* (см. решение задачи 19 из указанной книжки Болтянского и Яглома; там же можно найти разбор и применения теоремы Хелли); во втором за центр гомотетии принимается центр тяжести O многоугольника M как пластины. То, что O обладает нужными свойствами, проверяется очень просто.

Н. Нецветаев

◆

Ф538. *Тяжелая веревка подвешена в точках A и B (рис. 6). Абсолютное значение силы натяжения веревки в точке C равно 20 Н. Найти массу веревки.*

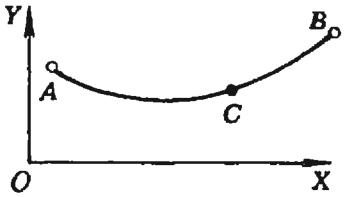


Рис. 6.

Обозначим m массу веревки, $\vec{T}_A$ и $\vec{T}_B$ — силы натяжения веревки в точках A и B. (Силы натяжения в каждой точке направлены по касательной к веревке). Так как веревка находится в равновесии, сумма сил, действующих на нее, равна нулю:

$$\vec{T}_A + \vec{T}_B + m\vec{g} = 0.$$

Равна нулю и сумма проекций сил, действующих на веревку, на любую ось, в частности — на вертикальную ось OY. Следовательно,

$$T_{Ay} + T_{By} - m|\vec{g}| = 0,$$

откуда

$$m = \frac{T_{Ay} + T_{By}}{|\vec{g}|}.$$

Таким образом, для того чтобы найти массу веревки, следует определить T_{Ay} и T_{By}. Найдем их.

Участок CB веревки находится в равновесии. Это означает, что сумма проекций на горизонтальную ось OX сил натяжения, действующих на веревку в точках C и B, равна нулю:

$$T_{Cx} + T_{Bx} = 0.$$

Нарисуем в произвольном удобном масштабе силу $\vec{T}_C$ (рис. 7). Она направлена по касательной к веревке в точке C. Найдем проекцию силы $\vec{T}_C$ на ось OX. Теперь проведем касательную к веревке в точке B. Вдоль этой касательной направлена сила $\vec{T}_B$. На горизонтальной оси отложим проекцию силы T_{Bx} на ось OX, которая равна $-T_{Cx}$. Восстановив перпендикуляр в точке K до пере-

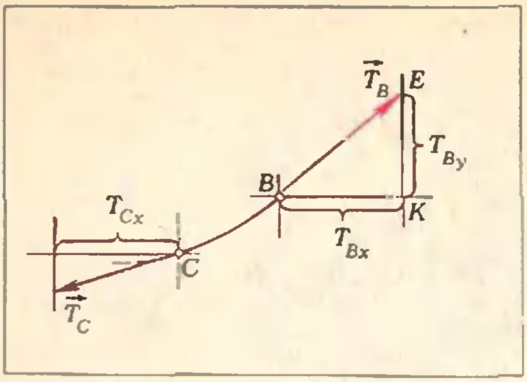


Рис. 7.

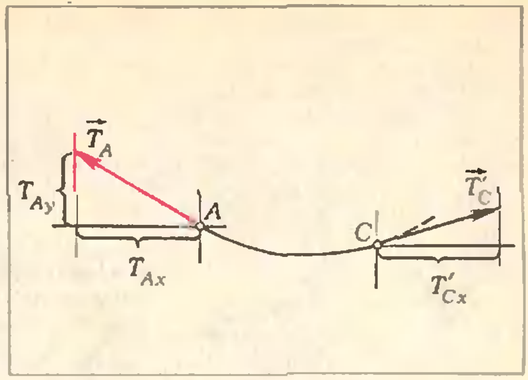


Рис. 8.

сечения с касательной в точке B, найдем силу $\vec{T}_B$. Теперь нетрудно найти проекцию силы $\vec{T}_B$ на вертикальную ось. Она определяется длиной отрезка KE с учетом масштаба, в котором мы рисовали силу $\vec{T}_C$. В нашем случае $T_{By} \approx 22$ Н.

Аналогично строится сила $\vec{T}_A$ натяжения веревки в точке A (рис. 8) и находится ее проекция на ось OY. В нашем случае она равна ≈ 9 Н.

Таким образом, $m = \frac{22+9}{9,8}$ кг $\approx 3,2$ кг.

И. Слободецкий

◆

Ф539. *На рисунке 9 показаны два замкнутых термодинамических цикла, проведенных с идеальным одноатомным газом: $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$ и $1 \to 5 \to 6 \to 4 \to 1$. У какого из циклов коэффициент полезного действия выше? Во сколько раз?*

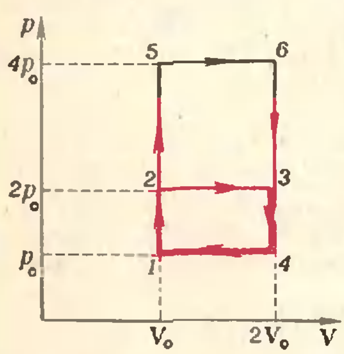


Рис. 9.

КПД цикла равен отношению работы A, совершенной газом, к количеству теплоты Q, сообщенной газу за цикл. Численно работа равна площади, ограниченной графиком цикла. Для первого цикла —

$$A_1 = (2p_0 - p_0)(2V_0 - V_0) = p_0V_0,$$

для второго цикла —

$$A_2 = (4p_0 - p_0)(2V_0 - V_0) = 3p_0V_0.$$

Найдем теперь Q_1 и Q_2. В первом случае теплота передается газу на участках $1-2$ и $2-3$. При этом газ нагревается, а на участке $2-3$ еще и совершает работу $A' = 2p_0V_0$. Следовательно, $Q_1 = A' + \Delta U'$. $\Delta U'$ — изменение внутренней энергии газа. Так как температура газа минимальна в точке 1 и максимальна в точке 3, а теплоемкость одного киломоля идеального одноатомного газа равна $\frac{3}{2}R$,

$$\Delta U' = \frac{3}{2}R\nu(T_3 - T_1).$$

Здесь ν — число киломолей газа, $T_1 = \frac{p_0V_0}{\nu R}$, $T_3 = \frac{4p_0V_0}{\nu R}$.

Поэтому $\Delta U' = \frac{9}{2}p_0V_0$ и $Q_1 = \frac{13}{2}p_0V_0$. Аналогично найдем для второго цикла $A'' = 4p_0V_0$ (на участке $5-6$),

$\Delta U'' = \frac{3}{2}R\nu(T_6 - T_1) = \frac{21}{2}p_0V_0$ и $Q_2 = \frac{29}{2}p_0V_0$.

Используя полученные данные, находим:

$$\eta_1 = \frac{2}{13}, \quad \eta_2 = \frac{6}{29}, \quad \eta_1/\eta_2 \approx 0,74.$$

А. Зильберман

Ф540. *Две катушки с индуктивностями L_1 и L_2 соединены параллельно. Какими будут максимальные токи в катушках, если параллельно им подключить конденсатор с емкостью C (рис. 10), предварительно заряженный до напряжения U?*

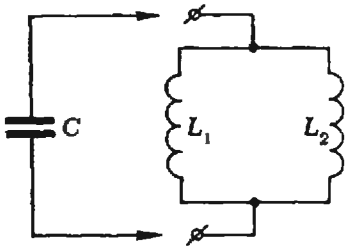


Рис. 10.

Так как катушки соединены параллельно, напряжения на них одинаковы: $U_{L_1} = U_{L_2}$. Но $U_{L_1} = L_1 \frac{\Delta I_1}{\Delta t}$, $U_{L_2} = L_2 \frac{\Delta I_2}{\Delta t}$.

Следовательно,

$$L_1 \frac{\Delta I_1}{\Delta t} = L_2 \frac{\Delta I_2}{\Delta t}. \qquad (1)$$

В начальный момент токи в обеих катушках равны нулю, поэтому из (1) следует, что токи I_1 и I_2 в любой момент времени таковы, что

$$L_1 I_1 = L_2 I_2. \qquad (2)$$

(Это означает, что максимальные значения токов в катушках достигаются одновременно.)

Ясно, что токи I_1 и I_2 максимальны, когда конденсатор разряжен. Из закона сохранения энергии следует, что в этот момент

$$\frac{CU^2}{2} = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2}. \qquad (3)$$

Из уравнений (2) и (3) находим:

$$I_1 = U\sqrt{\frac{L_2 C}{L_1(L_1+L_2)}}, \quad I_2 = U\sqrt{\frac{L_1 C}{L_2(L_1+L_2)}}.$$

О. Савченко

◆

Ф541. *Промежуток искрового генератора (рис. 11) отрегулирован на напряжение U, а сопротивление R резистора подобрано таким, чтобы происходило n разрядов в секунду. Определить среднюю мощность, выделяющуюся на резисторе, если во время разряда конденсатор успевает полностью разрядиться.*

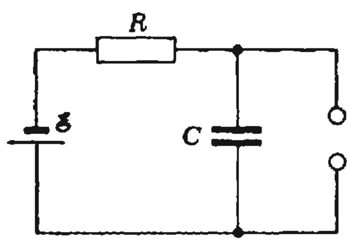


Рис. 11.

Для установившейся устойчивой работы искрового генератора необходимо, чтобы разряд в искровом промежутке не влиял на процесс зарядки конденсатора. Это возможно в случае, когда время разряда конденсатора через искровой промежуток значительно меньше времени зарядки его от источника до напряжения U.

В этом случае при нулевом напряжении на конденсаторе ток в искровом промежутке отсутствует, и промежуток восстанавливает свои диэлектрические свойства. Следующий пробой произойдет при достижении на промежутке, а следовательно, и на конденсаторе, напряжения U.

За время зарядки конденсатора до напряжения U батарея совершает работу $A = q\mathcal{E}$, где $q = CU$ — заряд на конденсаторе. Согласно закону сохранения энергии $A = Q + CU^2/2$, где Q — энергия, выделившаяся за время зарядки конденсатора на резисторе, $CU^2/2$ — энергия, запасенная в конденсаторе. Таким образом,

$$CU\mathcal{E} = Q + CU^2/2,$$

откуда

$$Q = CU\mathcal{E}\,(1 - U/2\mathcal{E}).$$

Так как время разряда конденсатора через искровой промежуток мало, можно пренебречь энергией, выделяющейся за это время на резисторе.

Если в 1 секунду конденсатор заряжается n раз, то средняя мощность, выделяющаяся на резисторе, равна

$$N = nCU\mathcal{E}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{U}{\mathcal{E}}\right).$$

П. Зубков

В. Гутенмахер

Неравенства с фиксированной суммой

В начале учебного года мы выбрали для нашего раздела тему «Неравенства», так как она пронизывает всю школьную программу по алгебре (см. гл. II «Алгебры 7», гл. I «Алгебры 8» и гл. IX пособия «Алгебра и начала анализа 10»).

Отметим, что к решению неравенств с несколькими переменными сводятся многие важные задачи из экономики и других приложений математики.

В статье на простейших задачах*) мы познакомимся с важными приемами рассуждений, которые помогут вам научиться свободно обращаться с неравенствами.

*) Часть этих задач составляет одно из заданий ВЗМШ (см. с. 32).

Задачи про муку

В условиях первых задач речь идет о тройках чисел a, b, c, связанных соотношением $a+b+c=1$, в третьей части — о способе изображения таких троек на плоскости.

Задача 1. *В трех пакетах находится 1 кг муки. Кроме того, известно, что в первом пакете муки не больше, чем во втором, а во втором — не больше, чем в третьем.*

а) *Может ли в третьем пакете находиться $^2/_5$ кг муки?*

б) *Может ли в третьем пакете находиться $^1/_5$ кг муки?*

в) *Сколько, самое меньшее, может быть муки в третьем пакете?*

г) *Сколько, самое большее, может быть муки в третьем пакете?*

а) Ответ. Может. Приведем пример. Распределим муку так: в первый и второй пакеты положим $^3/_{10}$ кг муки, а в третий — $^2/_5$ кг. Тогда все условия выполнены: $^3/_{10}+^3/_{10}+^2/_5=1$, причем в первом пакете муки не больше, чем во втором ($^3/_{10}\leqslant ^3/_{10}$), а во втором — не больше, чем в третьем ($^3/_{10}\leqslant ^2/_5$).

б) Ответ. Нет, не может. Докажем это. Допустим, что в третьем пакете $^1/_5$ кг, тогда во втором — не больше $^1/_5$ кг и в первом — тоже не больше $^1/_5$ кг. Но тогда во всех трех пакетах не больше $^3/_5$ кг муки, что противоречит условию. Поэтому наше допущение (что в третьем пакете $^1/_5$ кг) не верно.

в) Ответ. В третьем пакете, самое меньшее, $^1/_3$ кг. Докажем это. Покажем сначала, что в третьем пакете не меньше, чем $^1/_3$ кг. Допустим противное: пусть там меньше $^1/_3$ кг муки. Тогда и во втором, и в первом пакетах тоже меньше $^1/_3$ кг, но это означает, что во всех трех пакетах меньше 1 кг муки, что противоречит условию. Итак, в третьем пакете не меньше $^1/_3$ кг. Покажем теперь, что в третьем пакете может быть $^1/_3$ кг муки. Если насыпать в каждый пакет по $^1/_3$ кг, то сумма будет 1 кг и в первом пакете муки окажется не больше, чем во втором, а во втором — не больше, чем в третьем.

г) Ответ. В третьем пакете, самое большее, 1 кг. В самом деле, больше 1 кг не может быть по условию, а 1 кг получится, когда в первых двух пакетах муки вообще нет.

Следующие две задачи того же типа, что и задача 1. Напишите их решения, взяв за образец наше решение задачи 1.

Задача 2. *Условие то же, что в задаче 1. Нужно ответить на вопросы:*

а) *Может ли во втором пакете быть $^2/_5$ кг муки?*

б) *Может ли во втором пакете быть $^3/_5$ кг муки?*

и доказать, что

в) *Во втором пакете, самое большее, $^1/_2$ кг муки.*

г) *Во втором пакете может быть 0 кг муки.*

Задача 3. *Условие то же, что в задаче 1. Надо ответить на вопросы:*

а) *Может ли в первом пакете быть $^{13}/_{37}$ кг муки?*

б) *Может ли в первом пакете быть $^{12}/_{37}$ кг муки?*

в) *Сколько, самое большее, муки в первом пакете?*

г) *Сколько, самое меньшее, муки в первом пакете?*

Вместо муки — числа и углы

Обратимся снова к задаче 1. Ее можно сформулировать и по-другому:

Задача 4. *Про числа a, b, c известно, что $a+b+c=1$ и $0\leqslant a\leqslant b\leqslant c$.*

а) *Может ли c равняться $^2/_5$?*

б) *Может ли c равняться $^1/_5$?*

в) *Найдите наименьшее значение c.*

г) *Найдите наибольшее значение c.*

Решение задачи 4 можно записать так:

а) c может быть равно $^2/_5$. Например, $c={}^2/_5$, $a={}^3/_{10}$, $b={}^3/_{10}$, тогда $^3/_{10}+{}^3/_{10}+{}^2/_5=1$ и $^3/_{10}\leqslant{}^3/_{10}\leqslant{}^2/_5$.

б) c не может быть равно $^1/_5$. В самом деле, если $c={}^1/_5$, то $b\leqslant{}^1/_5$, $a\leqslant{}^1/_5$, поэтому $a+b+c\leqslant{}^3/_5<1$, а это противоречит условию задачи.

в) Наименьшее значение c равно $^1/_3$. Покажем сначала, что $c\geqslant{}^1/_3$. Допустим противное, т. е. что $c<{}^1/_3$, тогда $b<{}^1/_3$ и $a<{}^1/_3$, поэтому $a+b+c<1$, что невозможно. Итак $c\geqslant{}^1/_3$. Покажем, что c может равняться $^1/_3$. В самом деле, если положить $a=b=c={}^1/_3$, все условия будут выполнены.

Задача 5. *Переформулируйте аналогичным образом задачу 2 и приведите ее решение так же, как мы это сделали с задачей 1 (см. задачу 4).*

Решите теперь следующие задачи, похожие на задачи 4 и 5:

Задача 6. *Про числа a_1, a_2, a_3 известно, что $a_1+a_2+a_3=1$ и $0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant a_3$.*

а) *Найдите максимальное значение $2a_1+3a_2$.*

б) *Найдите минимальное значение $2a_1+3a_2$.*

Задача 7. а) *Может ли наибольший по величине угол в треугольнике равняться 50°?*

б) *Может ли средний по величине угол в треугольнике равняться 88°?*

в) *Может ли меньший по величине угол в треугольнике равняться 66°?*

Задача 8. *Какое наименьшее значение может принимать наибольший угол в треугольнике?*

Задача 9. *В трех пакетах находится 1 кг муки, причем известно, что в первом пакете в два раза меньше муки, чем во втором, а во втором — не больше, чем в третьем. Сколько, самое большее, может находиться муки во втором пакете?*

Задача 10. *Пять прямых на плоскости расположены так, что никакие две из них не параллельны. Докажите, что среди них найдутся,* *по крайней мере, две прямые, угол между которыми не меньше* 36°.

Указание. Выберите произвольную точку на плоскости и проведите через нее прямые, параллельные данным.

Задача 11. *Докажите, что в выпуклом пятиугольнике не может быть больше трех острых углов.*

Задача 12. *Про числа a, b, c, d известно, что $a+b+c+d=4$ и $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$.*

а) *Докажите, что $c \leqslant 2$.*

б) *Докажите, что наибольшее значение $b+c$ равно $^8/_3$.*

в) *Найдите наименьшее значение $a+d$.*

Задача 13. *Про числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 известно, что $a_1+a_2+a_3+$ $+a_4+a_5=1$ и $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant$ $\leqslant a_4 \leqslant a_5$.*

а) *Докажите, что $a_3 \leqslant {}^1/_3$.*

б) *Найдите наибольшее значение $a_2+a_3+a_4$.*

в) *Найдите наименьшее значение a_1+a_5.*

Задачи про правильный треугольник

Задача 14. *Дан равносторонний треугольник. Найдите множество точек внутри него:*

а) *удаленных от стороны AB не больше, чем от стороны BC;*

б) *удаленных от стороны BC не больше, чем от стороны AC;*

в) *удовлетворяющих одновременно условиям а) и б).*

Ответ на вопрос а) показан цветом на рис. 1а), на вопрос в) — на рис. 1 б).

Оказывается, задача 14в) тесно связана с задачей 1. Для того, чтобы перекинуть мостик между этими задачами, решим следующую задачу:

Задача 15. *Докажите, что сумма расстояний от любой точки внутри равностороннего треугольника ABC до его сторон равна длине h его высоты.*

Решение. Возьмем произвольную точку M внутри треугольника ABC и опустим из нее перпендикуляры на стороны AB, BC и AC. Пусть длины получившихся отрезков равны h_1, h_2 и h_3; это и есть расстояния от точки M до сторон. Надо доказать, что $h_1+h_2+h_3=h$. Соединим точку M с вершинами A, B и C. Очевидно, $S_{ABM}+S_{CBM}+S_{CMA}=S_{ABC}$, где S_{ABM}, S_{CBM}, S_{CMA}, S_{ABC} — площади треугольников ABM, CBM, CMA, ABC соответственно. Обозначим длину сторон треугольника ABC через a и перепишем это равенство так:

$$\frac{ah_1}{2}+\frac{ah_2}{2}+\frac{ah_3}{2}=\frac{ah}{2}.$$

Отсюда следует доказываемое равенство: $h_1+h_2+h_3=h$.

Дополнение к задаче 15. Утверждение этой задачи верно не только для внутренних точек треугольника, но и для точек, лежащих на его сторонах и в вершинах. (При этом мы считаем, что если точка лежит на стороне треугольника, то ее расстояние до этой стороны равно нулю.) Докажите это самостоятельно.

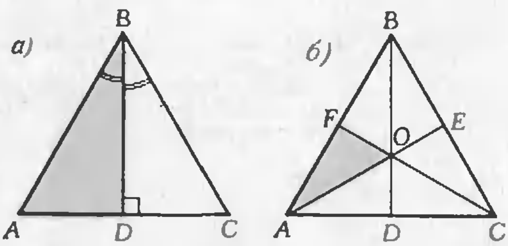


Рис. 1

Возьмем равносторонний треугольник ABC таким, чтобы его высота равнялась единице: $h=1$. Решив задачу 15, мы узнали, что каждой точке внутри нашего треугольника ABC соответствуют три числа h_1, h_2, h_3, сумма которых равна 1.

Мы предлагаем вам самим подумать над доказательством «обратного» утверждения: если заданы три числа h_1, h_2, h_3 таких, что $h_1 \geqslant 0$, $h_2 \geqslant 0$, $h_3 \geqslant 0$, $h_1+h_2+h_3=1$, то внутри или на границе треугольника ABC можно найти точку M, расстояние от которой до $[AB]$ равно h_1, до $[BC]$ — h_2, до $[AC]$—h_3. Конечно, достаточно потребовать, чтобы выполнялись лишь первые два условия, тогда расстояние от M до третьей стороны, согласно задаче 15, будет $1-$ $-h_1-h_2=h_3$.

Итак, мы научились тройки положительных (точнее — неотрицательных) чисел (h_1; h_2; h_3), у которых $h_1+h_2+h_3=1$, изображать геометрически. Будем так и говорить: «точка (h_1; h_2; h_3)» *).

Геометрическая иллюстрация первых задач

Теперь снова вернемся к первым задачам. Рассмотрим, например, рис. 1б) к задаче 14 (здесь и дальше мы по-прежнему считаем, что высота треугольника ABC равна 1). На нем выделены цветом те точки (h_1; h_2; h_3), для которых $h_1 \leqslant h_2$ и $h_2 \leqslant h_3$.

Покажем, что на многие вопросы, которые мы ставили в первых задачах, очень легко ответить при помощи барицентрических координат. Например, вернемся к задаче 4.

Теперь у нас другие обозначения: $a=h_1$, $b=h_2$, $c=h_3$, а условия записываются так: $0 \leqslant h_1 \leqslant h_2 \leqslant h_3$, $h_1+h_2+h_3=1$.

*) Числа h_1, h_2, h_3 математики называют *барицентрическими координатами* точек правильного треугольника

Вопрос в) задачи 4 можно сформулировать теперь так: какая точка треугольника BOF ближе всего к стороне $[AC]$?

Вопрос г) — какая точка треугольника BOF дальше всего от стороны $[AC]$?

З а д а ч а 16. *Сформулируйте вопросы в) и г) в задаче 2 на геометрическом языке — так же, как мы это сделали для задачи 4.*

З а д а ч а 17. *Укажите внутри правильного треугольника ABC и на его границе такие точки* (h_1; h_2; h_3), *что* а) $h_1=1/4$, *б)* $h_1+h_2=1/2$, *в)* $h_1+h_2 \leqslant 3/5$.

Геометрическая иллюстрация наглядно показывает нам, почему экстремальные значения переменных в первых задачах достигаются тогда, когда неравенства обращаются в равенства.

Задание Всесоюзной заочной математической школы

Обязательные задачи: №№ 2, 3, 7 — 10, 12а), 17.

Дополнительные задачи: №№ 6, 11, 12б), 12в), 13б).

Об одной комбинаторной задаче

(Окончание. Начало см. на с. 19)

Далее было еще интереснее. В «Математическом просвещении» № 4 (М., ФМ, 1959) профессор А. Лопшиц, комментируя уже упомянутый сборник избранных задач и желая доставить любителям математики информацию и, разумеется, удовольствие, выбирает, конечно, на свой вкус, 27 задач из 400 уже выбранных. И снова обе эти задачи, независимо, попадают в список.

На самом же деле, как мы теперь убедились, обе эти задачи — две стороны одного и того же вопроса.

Из этой «истории» видно, что даже крупные математики не всегда понимают друг друга, так как, зачастую, говорят на разных языках. Это явление довольно широко распространилось в последнее время, когда поток информации превышает человеческие возможности ее качественной переработки.

квант для младших школьников

Задачи

1. Если Аня идет в школу пешком, а обратно едет на автобусе, то всего на дорогу она затрачивает полтора часа. Если же она едет на автобусе в оба конца, то весь путь занимает у нее тридцать минут. Сколько времени тратит Аня на дорогу, если и в школу, и из школы она идет пешком?

2. Может ли сумма $1+2+3+\ldots+p$ при каком-либо p оканчиваться на 1979?

3. На колхозный двор прилетело 35 ворон. Неожиданно испугавшись чего-то, вороны взлетели и разделились на две стаи: первая стая уселась на ветви старого тополя, а другая — на крышу водонапорной башни. Через некоторое время с тополя на крышу перелетело 5 ворон, столько же ворон совсем улетело с крыши, после чего на тополе осталось вдвое больше ворон, чем на крыше. Сколько было ворон в обеих стаях первоначально?

4. Найдите произведение

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{225}\right).$$

5. Задача-фокус. Возьмите трехзначное число. Запишите цифры в обратном порядке (например, 347→743, 525→525); получится еще одно трехзначное число. От большего числа отнимите меньшее. Последнюю цифру разности сообщите отгадчику. Отгадчик называет разность. Как он это делает?

Н. Михайлова

Емкости

Мне сегодня на уроке неинтересно. Мы по арифметике повторяем пройденное. Нужно вставить значок «больше» или «меньше». Я так чаек рисую, только я тогда значок переворачиваю — не так > или <, а так ⋁. И еще кружки считаем — сколько десятков, сколько единиц. Где целые десятки — белые кружки, а где столбик до десятка недорос — красные. Но мы с папой это уже все проходили, потому что мама велела ему меня «натаскать». «Натаскать» — это когда долго арифметику объясняют. Папа меня натаскивал, натаскивал и говорит: «Не понимаю, что от нас мама хочет. Ты у меня и сам все понимаешь.

На сегодня хватит. Вот тебе под занавес еще задача. Подумай пару дней. Когда-то ее решил один маленький мальчик вроде тебя. Потом он великим ученым стал. Только он сразу решил, а ты не потянешь. Но думай, думай, шевели извилинами, от этого их больше становится.»

Думал я, думал, но пока ничего не придумал, а сейчас мне класс мешает. Бубнят все чего-то, как далекий паровозик: «Бу-б-б, чух-чух-чух.»

«Открой задачник, Матвеев Женя, а то ты бог знает чем занят», — сказала Зинаида Ивановна.

Он у меня открыт, но не там, где у всех, а где папина задача лежит. Я ее вчера вечером решал, решал, но очень спать хотелось. Лег, а у меня в голове слово «емкость» из задачи застряло. Красивое слово.

Емкость — это и ведро, и кастрюля, и таз, даже некрасивые, неэмалированные. И банка консервная — тоже емкость. Мне всю ночь емкость снилась, так что я, когда проснулся, то еле добежал. И бабушка сказала, что в моем возрасте это уже стыдно.

А задача такая. *Даны две емкости: 3 литра и 5 литров — и цистерна молока. Как налить 4 литра*? Значит, так. Нужно налить ровно 4 литра молока. Я люблю молоко. Мама говорит — я в нее пошел. Когда была война, а молока не было, она все мечтала пойти в доярки, чтобы пить его целый день.

Странно все-таки! Как же лить молоко из цистерны без крана?

Приделаю ей кран:

Уже лучше. Теперь подставляю емкости. Наливаю полные кастрюли.

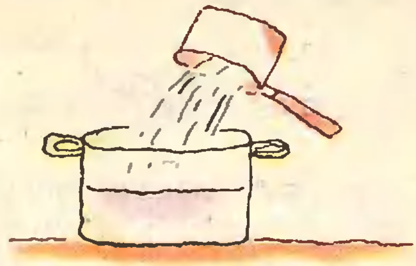
В этой кастрюльке 3 л, а нужно 4. Значит, $4>3$ и $4-3=1$. На 1 л меньше, чем нужно. А добавлять все равно некуда. Она же полная.

А в этой — 5 л. $5>4$ и $5-4=1$. Наоборот, на 1 л больше.

Как бы этот литр отлить? А как его отмерить? Мерки ведь нет. Вот в магазине черпачок такой есть литровый, и то мама говорит, что недоливают. А без мерки как же я отмерю?

Ничего не получается.

А если обе кастрюли вместе слить? $5+3=8$, а $8=4+4$. Будет целых два раза по 4! А куда сливать? В меня можно, потом пущу туда рыбок, как в аквариум, — пусть плавают.



Нет, не нужно рыбок, попрошу лучше папу, чтобы купил в зоомагазине китенка. Пущу в живот, назову Васей. Будем разговаривать.

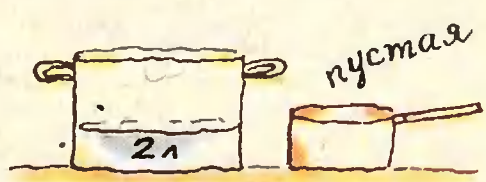
Но ведь он расти будет. Еще лопну. Нет, не надо никого. Ладно.

Некуда сливать кастрюлечки. Налью-ка я сначала в меньшую, а потом из нее перелью в большую:

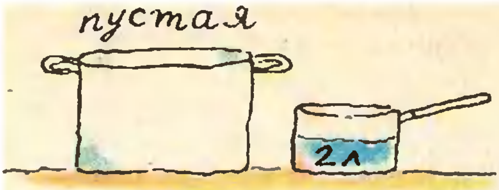
Маленькая теперь пустая совсем, а в большой 3 л молока и 2 литра пустых. Еще можно из маленькой лить. Снова наберу маленькую кастрюлечку полную и вылью в большую, сколько влезет. А туда 2 л влезут. Значит, в маленькой 1 л останется, а мне 1 л отмеривать из большой надо.

Попробую наоборот—из большой в пустую маленькую лить. Вылил 3 л. В большой 2 л осталось. Вот сколько. Теперь из маленькой кастрюльки вылью молоко, потому что емкость очень нужна. Вылью обратно в цистерну, не на землю же его лить. Правда?

Что у меня теперь получилось?



Ага! Перелью теперь из большой в пустую кастрюлечку. Что получилось?



Так ведь в маленькой пустого места теперь 1 л. Ура! Ура! Я ведь раньше хотел из большой 1 л отлить. Ровно один! Теперь у меня мерка есть. Скорей, скорей! Снова наливаю полную большую кастрюльку и из нее сливаю в маленькую. Сколько сливаю? Ровно литр. Что получается?

Я, наверное, как тот мальчик, буду великим ученым! У меня ведь тоже 4 л налито в кастрюльке! Ах, ты моя кастрюлечка! Уф! Теперь отдохну.

●

«Женя Матвеев, ты еще и заснул вдобавок!»

Разве ж я спал?

Есть еще решения!

В апрельском номере «Кванта» мы предложили младшим школьникам следующую задачу (см. с. 97):

Параллелограмм составлен из трех равнобедренных треугольников, среди которых нет конгруэнтных. Найдите величины его углов.

В пятом номере журнала мы указали два решения этой задачи: параллелограмм с острым углом 72° и параллелограмм с острым углом $\frac{360°}{7}$, приведя при этом три рисунка с возможными разбиениями (см. с. 63). Как справедливо заметил нам читатель *А. Гольдберг* из Ленинграда, задача имеет не два, а п я т ь решений: параллелограммы с острыми углами 36°, 72°, $\frac{180°}{7}$, $\frac{360°}{7}$ и $\frac{540°}{7}$. Мы извиняемся перед читателями и, не приводя полного решения задачи (это довольно скучный перебор многих случаев), помещаем только рисунки.

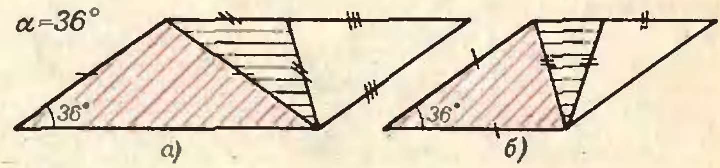


Схема 1.

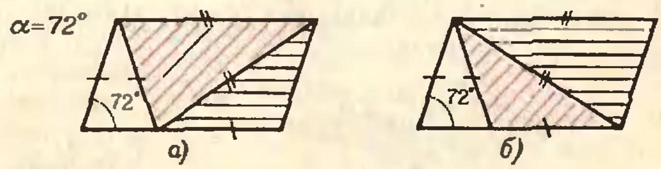


Схема 2.

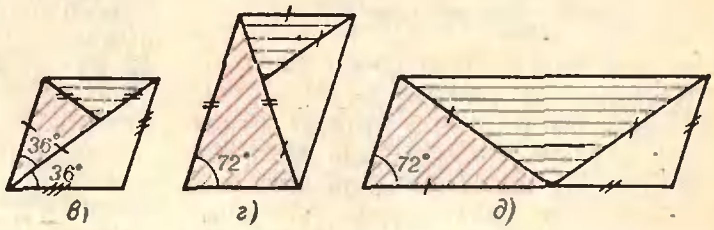


Схема 3.

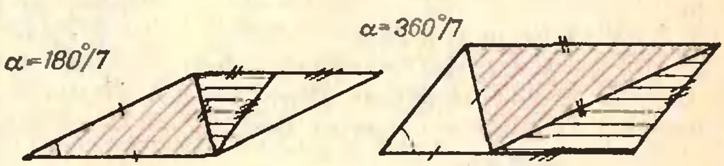


Схема 4.

Схема 5.

Кончились летние каникулы, начался новый учебный год. Начинается учебный год и в «Практикуме абитуриента» — традиционном разделе нашего журнала.

Какие задачи и вопросы предлагают абитуриентам на вступительных экзаменах по математике и физике в различных вузах? В чем состоят типичные недостатки ответов поступающих, их характерные ошибки? Как проходят приемные экзамены? Чему при подготовке к этим экзаменам уделять основное внимание? Как наиболее эффективно использовать оставшееся время и организовать повторение материала? Получаемые редакцией письма читателей, их выступления на читательских конференциях свидетельствуют, что подобные вопросы интересуют и волнуют очень многих — учащихся школ и профессионально-технических училищ, рабочую молодежь, учителей, любителей математики и физики и даже... родителей, подчас весьма далеких по своей специальности от этих наук. Ответам на все эти вопросы и посвящены материалы «Практикума абитуриента».

Прежде всего читатели найдут здесь статьи по отдельным разделам программ вступительных экзаменов в вузы по математике и физике. Такие статьи преследуют цель дать углубленное, подробное разъяснение наиболее важных и сложных тем школьных курсов математики и физики, предостеречь будущих абитуриентов от наиболее часто встречающихся ошибок. Изложение теоретических положений в этих статьях, как правило, иллюстрируется разбором типичных задач, взятых из практики вступительных экзаменов. Намечая темы статей, редакция учитывает, по мере возможности, конкретные предложения и пожелания, высказываемые в письмах читателей.

Заменить собой школьные учебники, где изложены систематические курсы математики и физики, статьи «Практикума абитуриента», конечно же, не могут — да и нет такой нужды. Они рассчитаны на тех, кто уже усвоил содержание учебников и хотел бы получить дополнительные пояснения и задания для самостоятельной работы. Помимо публикаций, которые появятся в «Практикуме абитуриента» в последующих номерах «Кванта», при подготовке к вступительным экзаменам полезно познакомиться и с некоторыми статьями, помещенными в журнале в прошлые годы (тематический список таких статей см. в «Кванте», 1974, № 1, с. 52, 1976, № 1, с. 60).

Не следует думать, что материалы «Практикума абитуриента» рассчитаны только на десятиклассников. Ряд статей этого раздела вполне доступен девятиклассникам, да и из остальных статей им будет понятно очень многое.

Вполне естественно, что будущим абитуриентам интересно узнать, какого рода задачи предлагают на вступительных экзаменах. Ведь каждому хотелось бы конкретно представить себе, что такое экзамен, заранее познакомиться с уровнем требований экзаменаторов в различных учебных заведениях. Это особенно важно для молодежи, оканчивающей школы в селах, рабочих поселках, небольших городках. В «Практикуме абитуриента» будут систематически помещаться образцы вариантов письменных экзаменов и задач устных экзаменов по математике и физике, которые предлагались в 1979 году в различных вузах нашей страны. Хотя эти задачи различаются по своей сложности, читатели сами убедятся в главном: для их решения достаточно лишь хорошо усвоить школьные курсы, и никаких дополнительных знаний не требуется. Кстати, публикуемые варианты дают отличную возможность попробовать свои силы в решении «реального» экзаменационного набора задач за фиксированное время (обычно на выполнение работы абитуриенты получают 4 часа).

Очень важно готовить себя к экзаменам и психологически, воспитывая волю, выдержку, самообладание. К сожалению, известно немало случаев, когда неплохо подготовленный абитуриент во время экзамена терялся, начинал нервничать и в результате не мог решить даже простые задачи или рассказать то, что хорошо знал.

Редакция журнала «Квант» надеется, что раздел «Практикум абитуриента» станет добрым советчиком поступающих. Вероятно, в ходе подготовки к экзаменам у читателей будут возникать какие-то вопросы, замечания, предложения. Напишите нам об этом. Редакция ответит на ваши вопросы — лично или в рубрике «Спрашивайте — отвечаем», а наиболее интересные предложения и соображения читателей будут опубликованы в обзоре «Читатели советуют».

Я. Суконник, П. Горнштейн

Геометрические решения геометрических задач

Памяти Вайнмана Б. Ш., учителя математики города Киева, посвящается.

При решении геометрических задач нередко прибегают к различным аналитическим методам. В настоящей же статье рассказывается о нескольких геометрических способах, которые делают решение простым и рациональным. Изложенные методы и приемы почти очевидны и, несомненно, не новы для читателя, но, тем не менее, думается, что напоминание о них будет полезным всем, кто желает хорошо научиться решать геометрические задачи.

1. Определим вид фигуры.

Решение задачи в некоторых случаях значительно ускорится, если предварительно определить вид, который может (или не может) иметь исходная фигура.

Задача 1 (МГУ, ВМК, 1978). *Около треугольника AMB описана окружность, центр которой удален от стороны AM на расстояние 10. Продолжение стороны AM за вершину M отсекает от касательной к окружности, проведенной через вершину B, отрезок BC, равный 29. Найти площадь треугольника BMC, если известно, что угол ACB равен* $\operatorname{arctg}\frac{20}{21}$.

Определим вид треугольника BMC, для чего проведем его высоту BM_1, продолжим ее до пересечения с окружностью в точке M_2 и спроектируем центр окружности O на сторону AM и хорду BM_2 (рис. 1). Тогда, согласно условию,

$$|OK|=10,\ |BM_1|=|BC|\sin\widehat{ACB}=29\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{20}{21}\right)=29\cdot\frac{20}{29}=20=2|OK|,\ |BM_2|=2|BL|=2(|BM_1|-|LM_1|)=2(|BM_1|-|OK|)=2|BM_1|-2|OK|=2|BM_1|-|BM_1|=|BM_1|.$$

Отсюда следует, что точки M, M_1 и M_2 совпадают (рис. 2) и, следовательно, точка O лежит на $[AB]$ и треугольник BMC — прямоугольный. Дальнейшее ясно. (Ответ. 210.)

Задача 2 (МГУ, геологич. ф-т, 1978). *В треугольнике ABC сторона $|AC|=3$, $\widehat{BAC}=\frac{\pi}{6}$ и радиус описанной окружности равен 2. Доказать, что площадь треугольника ABC строго меньше 3.*

Покажем, что $\triangle ABC$ не может быть прямоугольным. В самом деле, проведем в окружности радиуса 2 из точки A хорды AC, AB_1, AB_2 и диаметр AD (рис. 3) так, чтобы $|AC|=3$, $\widehat{B_1AC}=\widehat{B_2AC}=\frac{\pi}{6}$. Отрезок AB_1 не совпадает с отрезком AD, поскольку $\widehat{CAB_1}=\frac{\pi}{6}\neq\arccos\frac{3}{4}=\arccos\frac{|AC|}{|AD|}=\widehat{CAD}$. Следовательно, $\widehat{ACB_1}\neq\frac{\pi}{2}$ и $|AB_1|<|AD|$. Поэтому $S_{\triangle AB_1C}=\frac{1}{2}|AC|\cdot|AB_1|\sin\widehat{B_1AC}<\frac{1}{2}|AC|\cdot|AD|\sin\widehat{B_1AC}=\frac{1}{2}\cdot3\cdot4\times\sin\frac{\pi}{6}=3$. Неравенство $S_{\triangle AB_2C}<3$ легко следует из $|AB_2|<|AC|=3$.

2. «Достроим» фигуру.

Всякое геометрическое решение геометрической задачи начинается с работы над чертежом.

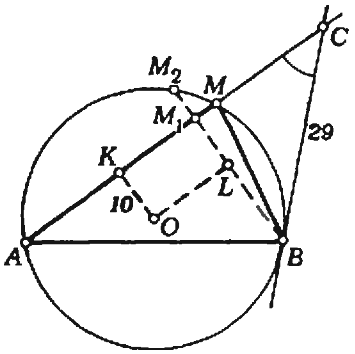


Рис. 1.

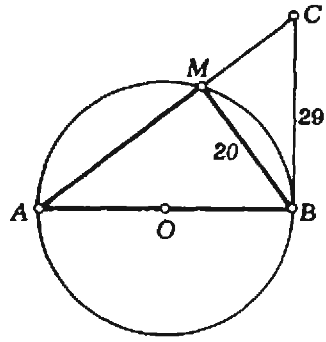


Рис. 2.

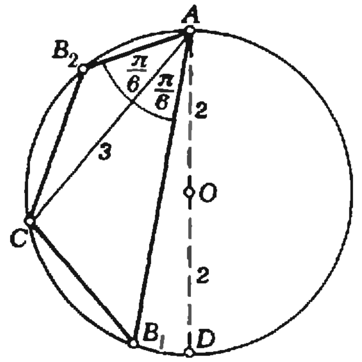


Рис. 3.

При этом иногда на «естественном» чертеже (т. е. на чертеже, на котором только «изображено» условие) трудно заметить связи между данными и искомыми величинами, а если фигуру «достроить», эти связи становятся очевидными.

З а д а ч а 3 (МГУ, ф-т почвоведения, 1977). *Длины основания CD, диагонали BD и боковой стороны AD трапеции $ABCD$ равны между собой и равны p. Длина боковой стороны BC равна q. Найти длину диагонали AC.*

В данной трапеции $ABCD$ (рис. 4) нелегко увидеть связь между искомой диагональю AC и другими отрезками. Если же, приняв во внимание, что точка D равноудалена от точек A, B и C, провести окружность $O(D, p)$ и «достроить» данную трапецию до равнобедренной трапеции $ABCE$, из прямоугольного треугольника ACE легко найдем $|AC| = \sqrt{4p^2 - q^2}$.

З а д а ч а 4 (НГУ, 1976). *В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD биссектриса угла B перпендикулярна боковой стороне AD и пересекает ее в точке E. В каком отношении прямая BE делит площадь трапеции, если известно, что длина отрезка AE в два раза больше длины отрезка DE?*

Если «достроить» данную трапецию $ABCD$ до треугольника AFB (рис. 5), получим равнобедренный треугольник, от которого отрезок DC отсекает подобный треугольник DFC с коэффициентом подобия $\frac{1}{4}$. Поэтому искомое отношение равно

$$\frac{S_{EDCB}}{S_{\Delta AEB}} = \frac{S_{\Delta EFB} - S_{\Delta DFC}}{S_{\Delta AEB}} = \frac{\frac{1}{2} S_{\Delta AFB} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 S_{\Delta AFB}}{\frac{1}{2} S_{\Delta AFB}} = \frac{7}{8}.$$

3. Опишем окружность.

В некоторых случаях существенным моментом в геометрическом решении задачи является установление конгруэнтности некоторых углов. Чаще всего такие углы являются соответственными в подобных треугольниках

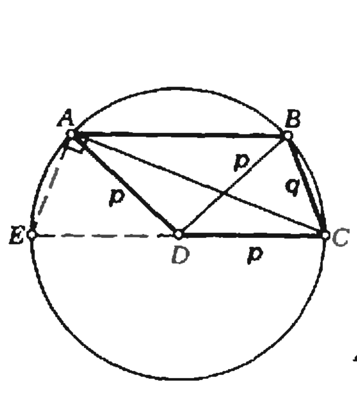


Рис. 4.

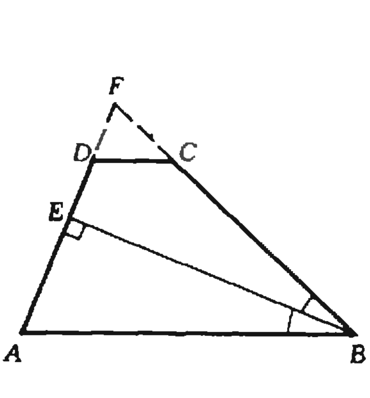


Рис. 5.

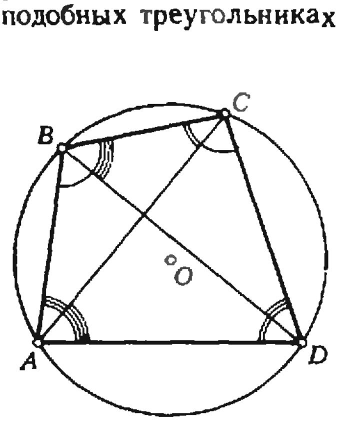


Рис. 6.

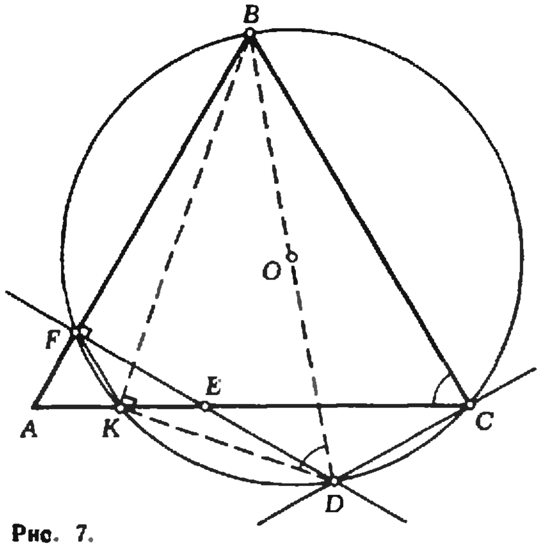


Рис. 7.

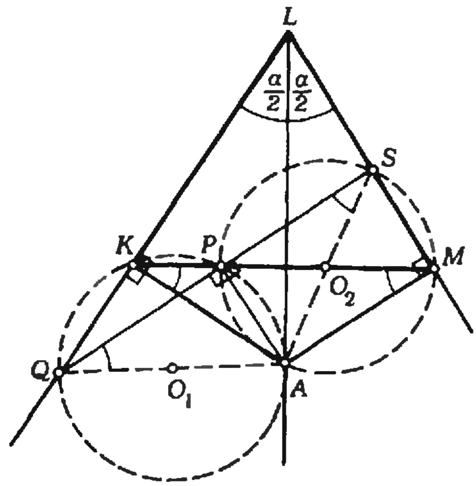


Рис. 8.

или многоугольниках. Однако возможны такие ситуации, когда конгруэнтность рассматриваемой пары углов следует из конгруэнтности другой пары углов, величины которых известны. Например, около четырехугольника $ABCD$ тогда и только тогда можно описать окружность, когда $\widehat{ABC}+\widehat{ADC}=180^\circ$ («Геометрия 8», п. 113). Легко доказать, что это условие равносильно условию $\widehat{ABD}=\widehat{ACD}$. Таким образом, равенства $\widehat{ABD}=\widehat{ACD}$, $\widehat{ACB}=\widehat{ADB}$, $\widehat{BAC}=\widehat{BDC}$, $\widehat{CAD}=\widehat{CBD}$ равносильны (рис. 6).

З а д а ч а 5 (МФТИ, 1976). *Точка E лежит на стороне AC правильного треугольника ABC; точка K — середина отрезка AE. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно (AB), и прямая, проходящая через точку C перпендикулярно (BC), пересекаются в точке D. Найти углы треугольника BKD.*

Пусть прямая ED пересекает прямую AB в точке F (рис. 7). Тогда треугольник AFE — прямоугольный, причем $[FK]$ — медиана. Значит, треугольник AFK — правильный треугольник, гомотетичный данному треугольнику ABC. Поэтому $[FK]\parallel[BC]$ и четырехугольник $BFKC$ — равнобедренная трапеция. Следовательно, около него можно описать окружность. Из $\widehat{BFD}+\widehat{BCD}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$ следует, что точка D принадлежит той же окружности. Поэтому $\widehat{BKD}=\widehat{BFD}=90^\circ$, $\widehat{KDB}=\widehat{KCB}=60^\circ$ и $\widehat{DBK}=30^\circ$.

З а д а ч а 6 (МГУ, физфак, 1974). *На биссектрисе угла с вершиной L взята точка A. Точки K и M — основания перпендикуляров, опущенных из A на стороны угла. На отрезке KM взята точка P ($|KP|<|PM|$) и через точку P перпендикулярно к отрезку AP проведена прямая, пересекающая прямую KL в точке Q (K между Q и L), а прямую ML — в точке S. Известно, что $\widehat{KLM}=\alpha$, $|KM|=a$, $|QS|=b$. Найти длину отрезка KQ.*

Как известно, $|AK|=|AM|$. Легко сообразить, что $\widehat{AKM}=\widehat{ALK}=\frac{\alpha}{2}$. Поэтому $|AK|=\dfrac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Вокруг четырехугольников $APKQ$ ($\widehat{APQ}=\widehat{AKQ}=90^\circ$) и $APSM$ ($\widehat{APS}+\widehat{AMS}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$) можно описать окружности (рис. 8). Поскольку $\widehat{AQS}=\widehat{AQP}=\widehat{AKP}=\widehat{AKM}=\widehat{AMK}=\widehat{AMP}=\widehat{ASP}=\widehat{ASQ}=\frac{\alpha}{2}$, треугольник AQS — равнобедренный. Из $\triangle AQS$ находим $|AQ|$, затем из прямоугольного треугольника AKQ — $|KQ|=\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

4. „Этот вездесущий треугольник"

Поиск геометрического решения задачи можно вести в направлении рассмотрения фигур, свойства которых хорошо изучены. Одной из таких фигур, несомненно, является треугольник. Верный и добрый помощник — треугольник — поист не вездесущ и порою незаменим в наших рассуждениях, в отыскании простых и ясных решений. Позволим себе поэтому следующий совет: если вы испытываете затруднения в выборе правильного геометрического пути решения задачи, ищите треугольник!

З а д а ч а 7 (МГУ, ВМК, 1975). *Дана прямоугольная трапеция, основания которой равны a и b ($a<b$). Известно, что некоторая прямая, параллельная основаниям, рассекает ее на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. Определить радиусы этих окружностей.*

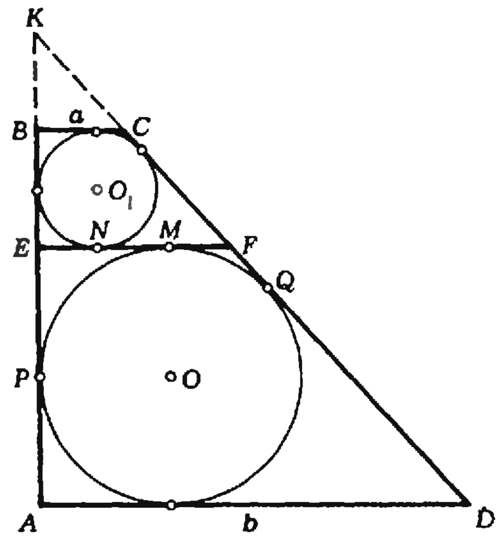


Рис. 9.

Достроим данную трапецию $ABCD$ до треугольника (рис. 9). Пусть окружности, вписанные в трапеции $AEFD$ и $EBCF$, касаются $[EF]$ в точках M и N, а радиусы их будут R и r соответственно. Поскольку данная трапеция — прямоугольная, $|EM|=R$, $|EN|=r$. Из равенства $|KP|=|KQ|$ легко вывести $|EN|=|MF|$. (Это утверждение имеет общий характер: в любом треугольнике точки касания вписанной и вневписанной окружностей равноудалены от концов стороны, которой они касаются. *Вневписанная окружность*—это окружность, касающаяся стороны треугольника и продолжений двух других сторон.) Значит, $|EF|=R+r$. Из подобия треугольников BKC, EKF и AKD получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{a}{R+r}=\dfrac{r}{R}, \\ \dfrac{R+r}{b}=\dfrac{r}{R} \end{cases}$$

(в подобных треугольниках как радиусы вписанных, так и радиусы вневписанных окружностей относятся как соответствующие стороны), из которой $R=\dfrac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, $r=\dfrac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

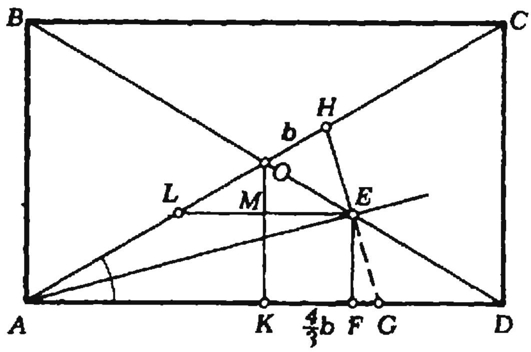


Рис. 10.

З а д а ч а 8 (МГУ, физфак, 1975). *В прямоугольнике $ABCD$ ($|BC|>|CD|$) диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Биссектриса угла CAD пересекает $[BD]$ в точке E. Пусть F — основание перпендикуляра, опущенного из точки E на сторону AD; точка K — середина $[AD]$. Через точку E проведен также перпендикуляр к $[AE]$ до пересечения с диагональю AC в точке H. Найти площадь $ABCD$, если $|OH|=b, |KF|=\frac{4}{3}b$.*

Проведем $[EL]\parallel[AD]$, где $L\in[AO]$ (рис. 10). Поскольку

$$\widehat{AEL}=\widehat{EAD}=\widehat{EAC}, |AL|=|LE|=$$
$$=2|ME|=2|KF|=\frac{8}{3}b.$$

Продолжим перпендикуляр HE до пересечения с $[AD]$ в точке G. Треугольник AHG — равнобедренный ($[AE]$ — биссектриса и высота). Так как $[LE]$ — средняя линия в нем,

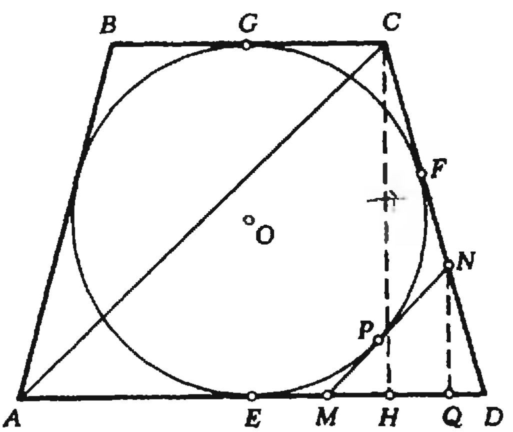


Рис. 11.

треугольник LHE также будет равнобедренным. Поэтому

$$|OM| = \sqrt{|OL|^2 - |LM|^2} = \sqrt{(|LH| - |OH|)^2 - |ME|^2} = \sqrt{(|LE| - |OH|)^2 - |KF|^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{3}b - b\right)^2 - \left(\frac{4}{3}b\right)^2} = b.$$

Используя подобие треугольников ACD и LOM с коэффициентом подобия

$$k = \frac{|AC|}{|LO|} = \frac{2|AO|}{|LH| - |OH|} = \frac{2(|AL| + |LH| - |OH|)}{|LE| - |OH|} = \frac{2\left(\frac{8}{3}b + \frac{8}{3}b - b\right)}{\frac{8}{3}b - b} = 5{,}2,$$

находим искомую площадь

$$S_{ABCD} = 2S_{\Delta ACD} = 2k^2 S_{\Delta LOM} = k^2 \cdot |LM| \cdot |OM| = (5{,}2)^2 \cdot \frac{4}{3} b \cdot b = \left(36\frac{4}{75}\right) b^2.$$

Задача 9 (МФТИ, 1974). *Около окружности описана равнобедренная трапеция с основаниями AD и BC ($|AD| > |BC|$). Прямая, параллельная диагонали AC, пересекает стороны AD и CD соответственно в точках M и N и касается окружности в точке P. Определить углы трапеции, если* $\frac{|MP|}{|PN|} = k$.

Рассмотрение подобных треугольников ACD и MND (рис. 11) приводит к несложному геометрическому решению. Обозначим через E, F и G точки касания окружности со сторонами AD, CD и BC соответственно, через H и Q — проекции точек C и N на сторону AD. Положим $|PN| = 1$. Тогда $|MP| = k$, $|AH| = |AE| + |EH| = |ED| + |GC| = |DF| + |FC| = |DC|$. Из свойств подобия в треугольнике MND будет $|MQ| = |DN|$. Поэтому

$$|MN| = |MP| + |PN| = k + 1, \ |DQ| = |DE| - |QM| - |ME| = |DF| - |DN| - |MP| = |NF| - |MP| = |NP| - |MP| = 1 - k, \ 2|NQ|^2 = (|MQ|^2 + |NQ|^2) - (|DN|^2 - |NQ|^2) = |MN|^2 - |DQ|^2 = (k+1)^2 - (1-k)^2 = 4k, \ |NQ| = \sqrt{2k}.$$

Следовательно, $\operatorname{tg}\widehat{D} = \frac{|NQ|}{|DQ|} = \frac{\sqrt{2k}}{1-k}$,

$$\widehat{A} = \widehat{D} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2k}}{1-k}, \qquad \widehat{B} = \widehat{C} = \pi - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2k}}{1-k}.$$

Упражнения

1 (МГУ, филологич. ф-т, отделение структурной и прикладной лингвистики, 1978). Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность единичного радиуса. Известно, что $|AB| = \sqrt{2}$, $\widehat{ABE} = 45°$, $\widehat{EBD} = 30°$ и $|BC| = |CD|$. Чему равна площадь пятиугольника?

2 (МГУ, геологич. ф-т, 1978). В треугольнике ABC длина стороны AB равна 4, $\widehat{CAB} = \frac{\pi}{3}$, а радиус описанной окружности R равен 2,2. Доказать, что длина высоты, опущенной из вершины C на сторону AB, строго меньше $\frac{11\sqrt{3}}{5}$.

3 (НГУ, 1976). В параллелограмме $ABCD$ угол BAD равен 60°. Окружность, проходящая через точки A, B и D, пересекает сторону CD в середине. Найти площадь параллелограмма, если радиус окружности равен R.

4 (МГУ, ф-т почвоведения, 1977). Основание AB трапеции $ABCD$ вдвое длиннее основания CD и вдвое длиннее боковой стороны AD. Длина диагонали AC равна a, а длина боковой стороны BC равна b. Найти площадь трапеции.

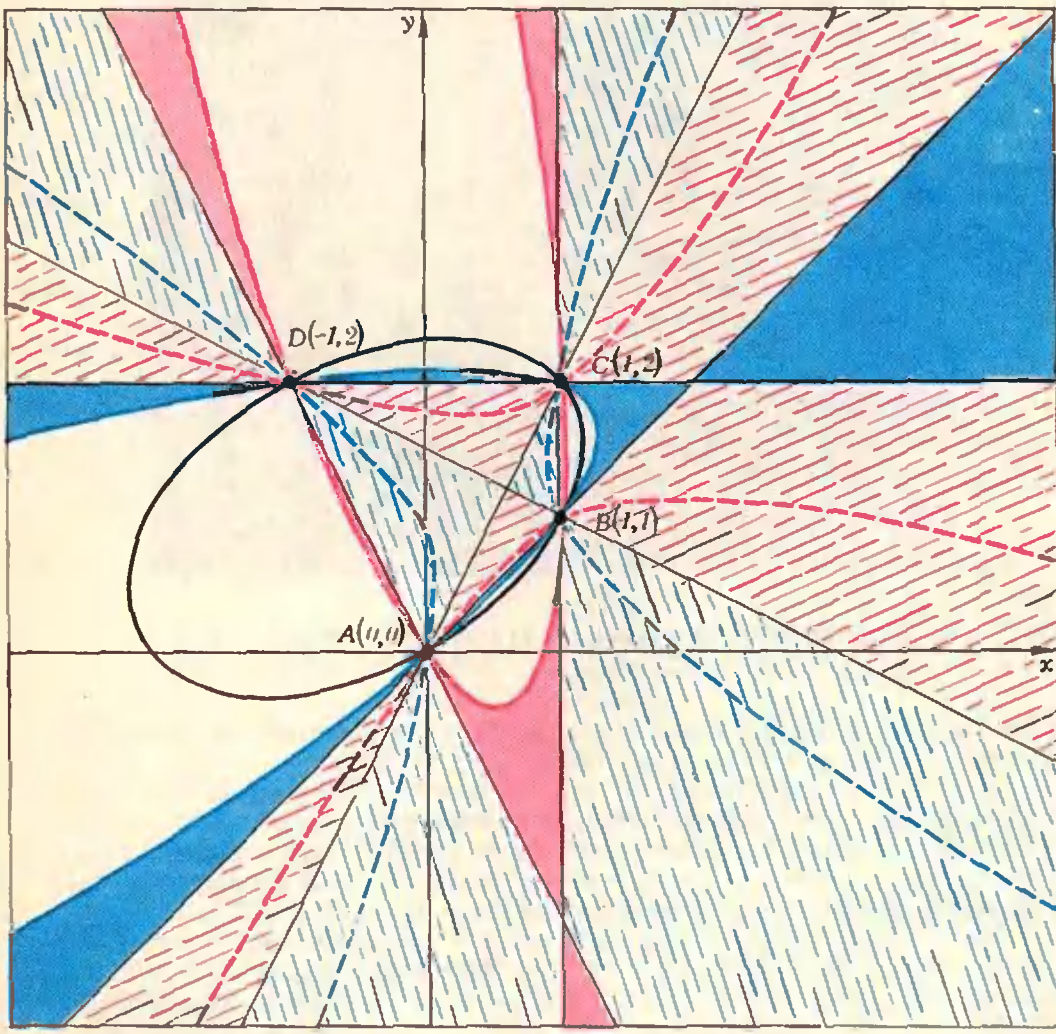
5 (МИИТ, 1977). Центр полуокружности лежит на большем основании AD трапеции $ABCD$; все остальные стороны касаются полуокружности. Доказать, что $|AD| = |AB| + |CD|$.

6 (МФТИ, 1976). Точка E лежит на продолжении стороны AC правильного треугольника ABC за точку C. Точка K — середина $[CE]$. Прямая, проходящая через точку A перпендикулярно (AB), и прямая, проходящая через точку E перпендикулярно (BC), пересекаются в точке D. Найти углы треугольника BKD.

7 (МГУ, физфак, 1976). В треугольнике KLM, все стороны которого различны, биссектриса угла KLM пересекает сторону KM в точке N. Через точку N проведена прямая, пересекающая сторону LM в точке A такой, что $|MN| = |AM|$. Известно, что $|LN| = a$, $|KL| + |KN| = b$. Найти $|AL|$.

8 (МГУ, химфак, 1978). На окружности радиуса 12 см с центром в точке O лежат точки A и B. Прямые AC и BC касаются этой окружности. Другая окружность с центром в точке M вписана в треугольник ABC и касается стороны AC в точке K, а стороны BC в точке H. Расстояние от точки M до прямой KH равно 3 см. Найти величину угла AOB.

9 (МГУ, физфак, 1977). Радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, в 4 раза меньше радиуса окружности, описанной около этого треугольника. Найти углы треугольника.



Заполним плоскость кривыми

На нашем рисунке показано семейство кривых второго порядка, проходящих через точки A (0;0), B (1;1), C (1;2), D (—1;2).

Напомним, что *кривой второго порядка* называется график уравнения

$$a_1x^2+a_2xy+a_3y^2+a_4x+a_5y+a_6=0$$

где не все три числа a_1, a_2, a_3 равны нулю. Полный список кривых второго порядка: *эллипс, гипербола, парабола, пара прямых* (пересекающихся или параллельных), *прямая, точка, пустое множество.*

Оказывается, *через точки A, B, C, D и любую точку E (x_0, y_0), отличную от них проходит ровно одна кривая второго поряд-*

(Окончание см. на с. 59)

Представляем новый раздел

Дорогие читатели! Сегодня в журнале «Квант» открывается новый раздел «Искусство программирования».

Вы, конечно, знаете, какое важное место занимают сейчас электронные вычислительные машины (ЭВМ) в науке и других сферах человеческой деятельности. Умение обращаться с ЭВМ необходимо практически всем — математику и лингвисту, геологу и библиотекарю, физику и биологу, технологу и экономисту, химику и врачу.

Цель нового раздела — научить вас работать с ЭВМ, обучить языку машин, разъяснить, что такое программирование, научить писать программы для ЭВМ. Читая статьи этого раздела, вы узнаете, как работают ЭВМ и где они применяются, что такое алгоритм и алгоритмические языки.

Программирование выросло из математики и ей служит. Поэтому новый раздел появляется именно на страницах журнала «Квант».

* * *

Кроме статей о вычислительной технике и программировании, с сентябрьского по майский номер «Кванта» в разделе «Искусство программирования» будут публиковаться задания Заочной школы программирования.

Заочная школа организована Вычислительным центром Сибирского отделения АН СССР (ВЦ СО АН СССР) и редакцией журнала «Квант». В школу принимаются учащиеся 6—10 классов. Полный курс школы рассчитан на 3 года, поэтому в первую очередь приглашаются учащиеся 6-го, 7-го и 8-го класса. Школьники, выполняя домашние задания, научатся писать программы для ЭВМ, освоят несколько языков программирования.

Однако машинное решение задачи на самом деле не сводится только к написанию программы. Очень важно запустить написанную программу на ЭВМ и «отладить» ее — найти в программе все ошибки и описки и убрать их. А как помочь читателям в запуске и отладке программы, если у него дома и даже в его школе пока нет вычислительной машины? Для этого Заочная школа программирования имеет свой заочный вычислительный центр, адрес которого указан ниже. По этому адресу можно будет посылать составленные вами программы и получать в ответ не только письмо программиста, прочитавшего ваше послание, но и (это самое главное!) выданный машиной результат работы программы или... сообщение машины об ошибках, которые вами допущены при составлении программы.

Лучшие из учащихся нашей школы будут приглашаться в летнюю школу программистов в Академгородок под Новосибирском, где уже очно познакомятся с современными ЭВМ.

Окончившие полный курс Заочной школы получат специальное удостоверение.

Мы приглашаем в нашу школу также девятиклассников и десятиклассников: хотя первые уроки им могут показаться совсем простыми, а трехлетний курс они не закончат, мы уверены, что они найдут здесь для себя много интересного и полезного.

Для зачисления в школу необходимо не позднее 15 октября выслать по указанному ниже адресу заявление, составленное по следующему образцу:

В Заочную школу программирования

Заявление

Я, Сергеев Владимир Георгиевич, ученик 6 «В» класса школы № 25 Советского района г. Новосибирска, прошу зачислить меня в Заочную школу программирования.

Домашний адрес: 630072, г. Новосибирск, 72, ул. Золотодолинская, 29, кв. 13, телефона нет.

Дата рождения — 9 января 1966 года.

Сведения о родителях: отец — Сергеев Георгий Георгиевич, водитель АТП-20101; мать — Сергеева Елена Николаевна, учительница СШ № 130.

В математических кружках я не занимался, программирования нигде не изучал.

10 октября 1979 г. *Сергеев*

Адрес для отправки заданий: 630090, Новосибирск, 90, просп. Науки, 6, ВЦ СО АН СССР, отдел информатики, Заочная школа программирования.

В каждом выпуске Заочной школы программирования будут публиковаться задания для самостоятельного выполнения, отмеченные стрелкой.

Красной стрелкой отмечены обязательные задания, которые должны быть выполнены и отправлены на проверку в течение двух недель со дня получения журнала. Синей стрелкой отмечены задания повышенной трудности, выполнение которых не обязательно. Все задания одного номера выполняются в отдельной тетради в клетку, на обложке которой необходимо указать свою фамилию, имя, домашний адрес, школу, класс и номер журнала, где оно было напечатано. Решение заданий первых двух уроков высылайте вместе с заявлением.

В марте 1980 г. среди учащихся Заочной школы программирования будет проведена олимпиада. Победители будут приглашены летом 1980 г. в новосибирский Академгородок — в Летнюю школу юных программистов.

* *
*

Кроме уроков Заочной школы программирования, в нашем разделе будет несколько подразделов.

О том, как устроена вычислительная машина, будет рассказано в статьях подраздела «Анатомия вычислительных машин». В одном из ближайших номеров вы прочитаете в этом подразделе об устройстве машинной памяти, потом — о работе ее «мозга», центрального процессора, потом — о ее «органах чувств», устройствах ввода и вывода.

Если в «Анатомии вычислительных машин» описываются общие принципы устройства и действия ЭВМ, то рассказу о конкретных серийных машинах и их устройствах посвящается подраздел «Панорама вычислительной техники».

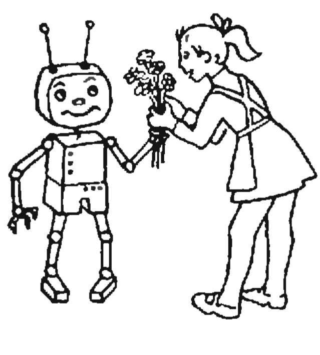
Сведения об истории развития науки очень важны в каждой научной дисциплине, в том числе и в программировании. О том, какими путями развивались теория и практика этой еще молодой науки, кто стоял у ее истоков, какими были первые машины и программы, расскажет «Историческая серия» и ее «Технический музей».

На страницах раздела отведено место и для статей, с которыми выступят школьники, написавшие и отладившие интересные программы. Это место — подраздел «Трибуна юного программиста».

Хорошим уроком программирования может оказаться не только описание какого-нибудь приема программирования, но и подробный анализ машинного решения интересной задачи. Статьи о типовых прикладных задачах, с которыми сталкиваются программисты, помещаются в подразделе «ЭВМ решает задачу». В нем мы постараемся рассказать, как рассчитывается траектория полета ракеты, как редактируется на машине газетный текст, как разыскиваются по просьбе библиотекаря нужная статья или книга.

Следите за разделом «Рецензии и библиография» в «Кванте». Там теперь чаще будут печататься сообщения об учебниках и задачниках, а также о новых интересных книгах по программированию и применению ЭВМ.

А теперь наш раздел мы открываем статьей члена-корреспондента АН СССР А. П. Ершова и преподавателя Заочной школы программирования Г. А. Звенигородского.



А. Ершов, Г. Звенигородский

Зачем надо уметь программировать?

Повсеместное использование ЭВМ привело к появлению новой науки и нового вида занятий, новой профессии — программирования.

Важно сразу понять, что программирование — это нечто большее, нежели умение сообщать команды машине. Оно имеет важное значение для самого человека и оказывает на него заметное влияние. В известном смысле сам человек и даже коллективы людей часто действуют по определенным программам. Более того, мы сами живем в мире программ, подчас не сознавая этого.

Мир программ

Программа — это набор команд, обладающий двумя важными свойствами: в ы п о л н и м о с т ь — каждая команда очень проста и, будучи отданной, всегда может быть выполнена; о п р е д е л е н н о с т ь — в любой момент известно, какую команду выполнять следующей.

Эти два свойства программ — пожалуй, самые важные: именно они объясняют, почему программа обеспечивает ЭВМ автоматическую и непрерывную работу, приводящую к полезному результату.

Приведем пример чисто математической программы, в которой отчетливо проявляются эти два свойства:

Начальное состояние: даны два натуральных числа.

Шаг 1. Если числа равны, взять первое число в качестве результата и перестать работать.

Шаг 2. Если они не равны, вычесть меньшее из большего и разностью заменить большее число. После этого выполнять шаг 1.

З а д а ч а. *Что вычисляет эта программа?*

Но программы бывают не только математическими.

Прежде всего программами буквально напичкан наш организм. Человек — это совокупность большого числа биологических машин, каждая из которых управляется своими сложными программами. Ходим ли мы, дышим, читаем, дрожим от холода, ворочаемся во сне — все это результат действия многих биологических программ, введенных в нас генетически (наследственно), или сформировавшихся под воздействием среды, или выработанных сознательно. Не будет большим преувеличением сказать, что почти все, что мы делаем, мы делаем по программе, а когда размышляем, то, главным образом, корректируем наши старые программы и строим планы на будущее.

Умение планировать свои действия наперед — это важнейшая черта поведения человека. Выдающимися программистами в этом смысле являются спортсмены, космонавты, артисты, хирурги — словом, все люди непрестанного, сложного и безошибочного действия. В то же время врожденными программистами являются и осторожные, робкие с виду ребята, которые, попадая в новую обстановку, одолевают старших вопросами типа «А что дальше?», «А что, если?», «А где?», «А как тогда?» и т. п.

С давних времен казалось, что дети учатся, главным образом, подражанием, имитацией поведения старших. Лишь недавно, когда процесс обучения разглядели сквозь увеличительное стекло логического анализа, было обнаружено, что не только умственные, но даже многие двигательные навыки человек вырабатывает, лишь поняв их природу, найдя элементарные движения и положения, осознав и закрепив их в сознании в нужной последовательности, а затем натренировав до полного автоматизма.

Программы для ЭВМ

Теперь самое время спросить, в чем же особая роль ЭВМ в этом мире программ. Дело в том, что именно ЭВМ своим появлением и существованием сделали программы предметом математического исследования, создали программирование как самую массовую математическую профессию.

Математики и философы в сотрудничестве с биологами и инженерами убедительно показали, что законы управления и обработки информации, алгоритмы и программы, относящиеся к биологическим системам, с одной стороны, и к машинам-автоматам — с другой, устроены одинаково; для них годятся одни и те же математические абстракции и теории. ЭВМ, благодаря огромной скорости работы и способности выполнить любую программу, дают принципиальную возможность воспроизвести любое «правильное» действие. Это делает ЭВМ не только нашим послушным и всесильным помощником, но и строгим судьей полноты нашего знания о том действии, которое мы хотим передать машине.

Вернемся к нашей программе из двух команд, которая, как, вероятно, читатели догадались, вычисляет наибольший общий делитель двух чисел. Для того чтобы ЭВМ могла выполнить эту программу, она, конечно, должна «знать», например что значит «вычесть меньшее число из большего». В то же время она усердно и успешно будет трудиться над получением результата, не имея никакого представления о том, что такое наибольший общий делитель. Зато программист, сочиняя программу, должен очень хорошо знать, что будет делать машина и какими свойствами обладает соответствующая программа.

З а д а ч а. *Доказать, что указанная выше программа для любой пары исходных натуральных чисел выдаст результат, равный их наибольшему общему делителю.*

Итак, программа воплощает наше полное знание о задаче, причем, в отличие от теоремы или сочинения, в активной, многократно воспроизводимой форме. Машина, снабженная этой программой, будет вычислять наибольший общий делитель так же хорошо, как самый премудрый школьник, овладевший арифметикой. Именно в постоянной передаче ЭВМ человеческого умения последовательно выполнять целенаправленные операции состоит сущность научно-технической революции, связанной с автоматизацией умственного труда.

«Вторая грамотность»

Более пятисот лет назад человечество изобрело книгопечатание. Непосредственной целью этого изобретения было желание ускорить процесс переписывания церковных книг. Его же объективным результатом стала необыкновенно возросшая скорость человеческого прогресса через всеобщую грамотность и распространение печатного слова.

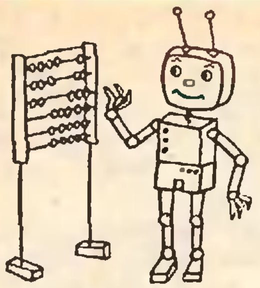
Электронно-вычислительные машины появились примерно 35 лет назад, в разгар второй мировой войны. Непосредственной целью их первоначального применения было ускорение расчетов при разработке систем вооружения. Однако уже сейчас видно то время, когда ЭВМ, создаваемые в десятках миллионов экземпляров, будут нашими верными и понятливыми партнерами во всех уголках Земли и в каждом виде нашей деятельности.

К этому времени программирование, то есть способность выразить любой «правильный» процесс средствами, доступными для передачи машине, станет второй грамотностью каждого образованного человека. Но это — в будущем. А сейчас перед вами стоит задача ликвидации «второй безграмотности». Вам предстоит овладеть азами программирования.

Для этого прежде всего необходимо ответить на вопрос — что умеют делать вычислительные машины?

Машины только вычисляют?

Вероятно, девять из каждых десяти наших читателей ответят на этот



вопрос почти не задумываясь: машины умеют выполнять с огромной скоростью арифметические действия над многозначными числами, поэтому они могут заменить человека всюду, где нужно выполнить сложные подсчеты, решить уравнение, составить таблицу, рассчитать траекторию космического корабля или конструкцию самолета — короче говоря, где нужно **считать, вычислять**— ведь не зря они называются **вычислительными** машинами.

Лет 15—20 назад с таким ответом согласилось бы большинство специалистов по вычислительной технике.

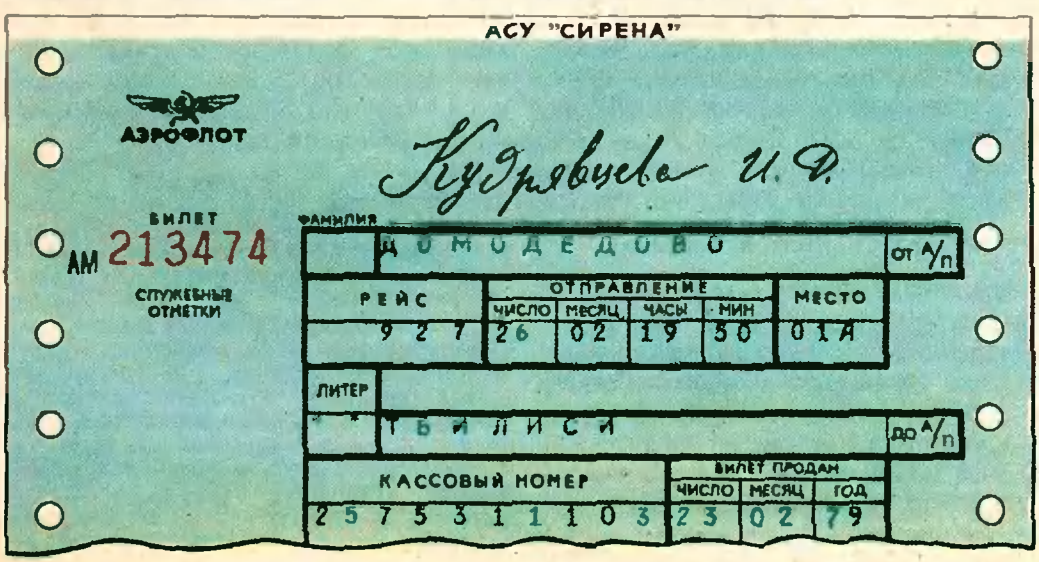
— А разве сегодня это не так? — может спросить удивленный читатель. — Неужели современные машины разучились считать?

Нет, не разучились, конечно. Количество задач, для решения которых нужно уметь только быстро и точно выполнить расчеты по известным формулам и правилам, не только не уменьшилось за последние годы, но даже возросло, и с такими задачами нынешние машины, разумеется, отлично справляются. Но вычисления — давно уже не единственная и, по-видимому, не главная сфера, где ЭВМ приходит на помощь человеку.

Система «Сирена» продает билеты

Рассмотрим один пример. Как известно, современные самолеты могут в течение нескольких часов доставить вас в самую отдаленную точку нашей страны. А вот оформление билета на самолет иногда занимает гораздо больше времени, чем сам полет. Особенно много времени требует бронирование мест, если вам нужно пересаживаться на другой самолет, например, в Киеве, Горьком или другом крупном городе. Агенство Аэрофлота, в котором вы заказывали билет, отправляет телеграмму в пункт пересадки с просьбой забронировать для вас места на таком-то рейсе. Диспетчер, отвечающий за этот рейс, открывает соответствующую таблицу, отмечает забронированные места и составляет ответную телеграмму, на основании которой вам выпишут билеты. Все это занимает три-четыре дня — это если все в порядке, ни одна бумажка нигде не застряла и на нужном рейсе есть свободные места.

Но если вам предстоит пересаживаться на другой самолет в Москве, то оформление билетов, вероятнее всего, займет не более двух-трех минут. Дело в том, что бронированием билетов в Москве занимается автоматизированная система «Сирена», основу которой составляет мощная вычислительная машина.



Специальные пульты для связи с этой ЭВМ — так называемые *терминалы* — установлены в большинстве крупных городов нашей страны. На каждом пульте есть клавиши, похожие на клавиатуру обычной пишущей машинки, небольшой экран, на котором появляются сообщения вычислительной машины, и печатающее устройство.

Предположим,что мы пришли к новосибирскому оператору системы «Сирена» с просьбой оформить несколько билетов на один из рейсов Москва — Харьков. Оператор набирает на клавиатуре соответствующий запрос, и через одну-две секунды на экране появляется ответ машины. В течение этих секунд вычислительная машина, находящаяся за несколько тысяч километров от Новосибирска, просмотрела расписание, выбрала удобный для нас рейс, определила, сколько на нем свободных мест, отвела нам места и сообщила их номера новосибирскому оператору — словом, проделала всю ту работу, на которую раньше уходило несколько дней.

Если предложенные машиной места нас устраивают, оператор набирает на пульте подтверждающее сообщение, и далекая ЭВМ запоминает, что места эти забронированы для пассажиров, которые таким-то рейсом прилетят из Новосибирска.

Если вспомнить теперь, сколько пассажиров каждый день прилетает в московские аэропорты и улетает из них, и попробовать представить себе, сколько человек одновременно обращается к операторам «Сирены» в разных городах, то, может быть, тогда мы почувствуем, какую огромную работу выполняет «мозг» системы.

Что же делает ЭВМ в системе?

Во-первых, она должна п о м н и т ь расписание всех самолетов, вылетающих из Москвы, и точный перечень свободных и занятых мест на этих самолетах, по крайней мере, на две недели вперед, иначе говоря, машина должна х р а н и т ь и н ф о р м а ц и ю о расписании и распределении мест на самолетах.

Во-вторых, машина должна п р и н и м а т ь з а п р о с ы, поступающие с терминалов, и о т в е ч а т ь н а з а п р о с ы, то есть вести диалог с человеком (возможно, с большим числом людей одновременно) при помощи терминалов.

В-третьих, она должна уметь, если это необходимо, и з м е н и т ь хранящиеся в памяти сведения: отметить, что места, которые были свободными, теперь забронированы, что в расписание внесены изменения — то есть о б р а б а т ы в а т ь и н ф о р м а ц и ю.

Для осуществления каждого из этих «умений» машины предназначено отдельное устройство: для хранения информации — *память* (*запоминающее устройство*) для диалога с человеком — *терминалы* (универсальный терминал «Видеотон-340» изображен на с. 44), для обработки хранящейся в памяти информации — *центральный процессор*.

Процессор — это мозг и сердце вычислительной системы: он управляет занесением информации в память и чтением ее из памяти, он принимает запросы от терминалов и передает с их помощью свои сообщения человеку, он выполняет всю необходимую обработку информации, хранящейся в памяти и поступающей от терминалов.

Обсуждая умения, необходимые вычислительной машине для работы в системе «Сирена», мы н и ч е г о не сказали об умении в ы ч и с л я т ь. И это не случайно: при оформлении билетов производить арифметические вычисления почти не приходится — разве что подсчитать стоимость льготного билета для школьника или число оставшихся свободных мест в самолете.

Во многих других автоматизированных системах, очень похожих на «Сирену», рассчитывать приходится гораздо больше, но вряд ли возможно придумать задачу, для решения которой машина должна была бы только считать: всегда бывает нужно помнить какую-то информацию (хотя бы порядок вычислений и промежуточные результаты), почти всегда необходимо принимать (вводить) некоторые сведения (например, исходные данные для вычислений) и сообщать о чем-то человеку или техническому устройству (например, другой вычислительной машине), то есть выводить информацию.

Группа юных программистов у графопостроителя.

Ввод и вывод информации не обязательно происходят при помощи терминалов, как в «Сирене». Например, для управления полетом ракеты машине удобно получать информацию прямо от радиолокатора, следящего за полетом. А для того, чтобы выполнить рисунок или чертеж, удобно выводить информацию не на терминал, а на рисующее устройство — графопостроитель (см. фотографию).

Таким образом, устройства для ввода и вывода информации могут быть разными, но общая схема остается неизменной: у всякой вычислительной машины есть *процессор*, *память*, *устройства для ввода и для вывода информации*.

СХЕМА 1

Неизменными остаются и основные «умения» вычислительной машины: *прием*, *хранение*, *обработка* и *вывод информации*.

Итак, на вопрос «Что умеют делать вычислительные машины?» мы, в основном, ответили.

А человек?

Теперь можно спросить: а что должен уметь человек, работающий с вычислительной машиной, составляющий для нее задания — программы?

В качестве ответа приведем цитату из статьи одного из авторов «О человеческом и эстетическом факторах в программировании»:

«Программист должен обладать способностью первоклассного математика к абстракции и логическому мышлению, в сочетании с эдисоновским талантом соорудить все, что угодно, из нуля и единицы. Он должен сочетать аккуратность бухгалтера с проницательностью разведчика, фантазию автора детективных романов с трезвой практичностью экономиста. А кроме того, программист должен иметь вкус к коллективной работе, понимать интересы пользователя и многое другое».

Для тех, кто хочет познакомиться с законами и методами программирования, изучить языки для взаимодействия с вычислительными машинами — *языки программирования*, научиться составлять программы для различных машин, сегодня начинает работу Заочная школа программирования. Передаем ей слово.

Законы программирования. Правила записи предписаний на языке Робик

Заочная школа программирования

Урок 1

Программы, написанные на большинстве современных языков программирования, состоят из отдельных предложений — точно так же, как и тексты на обычных, «человеческих» языках. Большинство читателей «Кванта», вероятно, помнит, что почти любое предложение на русском языке можно отнести к одной из трех больших групп: повествовательные, вопросительные и восклицательные предложения. Нам будет удобнее рассматриваемые предложения называть *утверждениями*, *вопросами* и *предписаниями*. Можно сказать, что *вопрос* — это предложение, на которое можно ответить. Примеры вопросов:

Какой он, этот слонопотам? Неужели очень злой? Идет ли он на свист? И, если идет, то зачем? Любит ли он поросят? И как он их любит?

Утверждение — это предложение, про которое имеет смысл спросить, истинно оно или ложно. Примеры:

Хорошо живет на свете Винни-Пух!

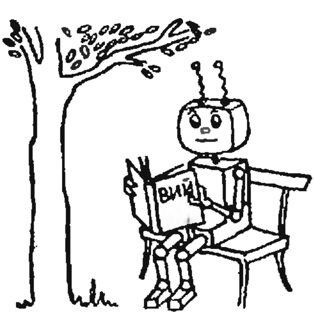
2+2=4.

Кот Матроскин подойти к телефону не может, он очень занят, он на печи лежит.

Предписание — это предложение, про которое имеет смысл спросить — как его исполнить? Примеры:

Позовите, пожалуйста, кота Матроскина к телефону!

Поднимите мои веки!



Не открывай рот, Пятачок, а то в него попадет мыло.

Скажите, пожалуйста, который час.

Широко известен анекдот о крупном физике, который после блестяще прочитанной лекции спросил у слушателей, есть ли у них вопросы.

— Я не понимаю, как Вы получили эту формулу,— сказал один из присутствовавших.

— Это утверждение, а не вопрос,— ответил лектор.— Вопросы есть?

В большинстве языков программирования самостоятельным предложением может быть предписание. Причина — неспособность роботов и ЭВМ понимать переносный смысл слов и предложений: если роботу нужно дать задание (а программа — это, по определению, задание для робота или ЭВМ), то каждое предложение должно быть таким, чтобы его можно было буквально исполнить — оно должно быть предписанием.

Роботу можно сказать:

— Запомни, что 2+2=4.

Но бессмысленно сообщать ему:

2+2=4.

Он просто не будет знать, что нужно сделать с таким утверждением.

Краткую формулировку этого правила называют *первым законом программирования*:

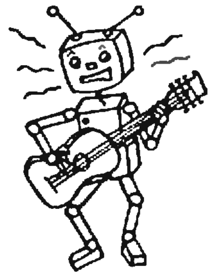
Программа состоит из предписаний.

Очевидно, для составления настоящих программ для конкретных роботов или ЭВМ недостаточно помнить формулировку первого закона, при всей его важности: нужно еще знать, какие предписания умеют исполнять именно эти роботы и машины и по каким правилам записываются эти предписания.

В инструкциях для любых вычислительных устройств обязательно перечисляются предписания, которые могут быть этими устройствами исполнены. Такой перечень называется системой предписаний (сокращенно — СПР).

Итак: *система предписаний* — это множество предписаний, которые понимает и может исполнить робот или вычислительная машина.

Например, система предписаний для робота РД-1, умеющего испол-



нять на каждой школьной перемене обязанности дежурного по классу, может выглядеть так:

Система предписаний РД-1	
ОТКРОЙ ОКНО;	НАМОЧИ ТРЯПКУ;
ЗАКРОЙ ОКНО;	СОТРИ С ДОСКИ;
СЯДЬ НА МЕСТО;	

С системами предписаний связано важнейшее правило, которое называют *вторым законом программирования*:

> В программах для любых роботов и ЭВМ можно использовать те и только те предписания, которые есть в их системах предписаний.

Несколько слов о грамматических правилах. В языках программирования их, к счастью, гораздо меньше, чем, например, в русском языке, но соблюдать их приходится очень строго. Вычислительная машина придирчивее самого строгого преподавателя, и одна пропущенная запятая может безнадежно испортить работу большой и красивой программы.

Робота или вычислительную машину можно научить одному или нескольким языкам программирования. В этом случае к их СПР добавляются предписания этого языка (языков).

Общие правила записи предписаний в языке Робик*), с которого мы начинаем изучение программирования, выглядят так:

1. Каждое предписание начинается с новой строки.

2. В конце предписания ставится точка с запятой (;).

*) Описываемый здесь язык Робик — это сокращенный вариант языка Робик-3, используемого для обучения школьников в Харьковской и Новосибирской школах юных программистов.

Внимательного читателя может удивить отсутствие правил употребления заглавных букв. Объясняется это просто: для того, чтобы ЭВМ или робот исполнили предписание, его необходимо набрать на клавишах терминала или другого аналогичного устройства, а буквы на клавиатуре — только заглавные; поэтому совершенно безразлично, какими буквами будут написаны предписания в журнале; здесь мы будем записывать их заглавными буквами, но при выполнении наших заданий предписания можно писать по правилам русского языка: первая буква — заглавная, далее — строчные.

Теперь, зная общие правила записи предписаний в языке Робик, мы можем составить первую программу для описанного выше робота РД-1, который должен стереть с доски и проветрить класс на перемене.

Вот пример правильной программы:

ОТКРОЙ ОКНО;
НАМОЧИ ТРЯПКУ;
СОТРИ С ДОСКИ;
ЗАКРОЙ ОКНО;
СЯДЬ НА МЕСТО;

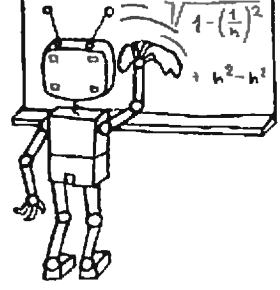
Задание 1.1. *Среди приведенных ниже пяти программ нужно найти правильные и перечислить все ошибки в остальных программах.*

Программа А

1. СОТРИ С ДОСКИ;
2. НАМОЧИ ТРЯПКУ;
3. ОТКРОЙ ОКНО;
4. ЗАКРОЙ ОКНО;
5. СЯДЬ НА МЕСТО;

Программа В

НАМОЧИ ТРЯПКУ;
ОТКРОЙ ОКНО;
СОТРИ С ДОСКИ;



ЗАКРОЙ ОКНО;
СЯДЬ НА МЕСТО;

Программа C

ОТКРОЙ ОКНО;
НАМОЧИ ТРЯПКУ;
ВЫТРИ С ДОСКИ;
ПОДМЕТИ ПОЛ;
СЯДЬ ЗА ПАРТУ;

Программа D

ОТКРОЙ ОКНО;
НАМОЧИ ТРЯПКУ;
СЯДЬ НА МЕСТО;

Программа E

НАМОЧИ ТРЯПКУ
СОТРИ С ДОСКИ
СЯДЬ НА МЕСТО

Попробуем представить себе, каким образом РД-1 будет исполнять нашу программу. Будем считать, что робот сидит за партой в классе, а на соседней парте установлен терминал «Видеотон-340». Диалог начинает робот. Как только вы нажимаете выключатель, на экране терминала появляется его первое сообщение:

ЗДРАВСТВУЙТЕ! Я РОБОТ РД-1!
Я ГОТОВ К РАБОТЕ!

После этого робот выдает на экран звездочку (*), которая означает, что он готов к приему первого предписания. Набираем

ОТКРОЙ ОКНО;

После точки с запятой нажимаем на клавишу «ETX» (это сокращение английских слов «end of text» — конец текста). Робот читает строку на экране терминала и начинает исполнять предписание: встает с места, идет к окну и т. д. Когда предписание будет выполнено, робот остановится, а на экране вновь появится звездочка. И так до конца программы.

Если система предписаний невелика, часто бывает удобно занумеровать предписания и использовать для управления вместо полного текста эти номера. Такие зашифрованные предписания мы отныне будем называть *командами*. А система предписаний превращается в *систему команд*. В качестве примера приведем систему команд самоходного аппарата Кибик:

Команда	Текст предписания
1	ПРОЕХАТЬ 100 МЕТРОВ
2	ПОВЕРНУТЬ ВПРАВО
3	ПОВЕРНУТЬ ВЛЕВО
0	ЗАКОНЧИТЬ РАБОТУ

В отличие от предписаний языка Робик, такие команды можно записывать на одной строке. Запись программы получается компактной, но понять ее трудно: 111311311121112111212112112112110.

Задание 1.2. *На листе клетчатой бумаги размером 10 на 10 см нарисуйте путь, пройденной Кибиком при исполнении этой программы, если начало координат расположено в левом нижнем углу, оси параллельны сторонам листа, масштаб 1 : 10000 (в 1 см — 100 м), а в начальный момент Кибик находится в точке с координатами (800, 500) (в метрах) и направлен вверх, т. е. вдоль положительного направления оси ординат.*

Важно учесть, что повороты выполняются Кибиком на месте, а правая и левая сторона определяются им по отношению к направлению его движения.

Задание 1.3. *Определите, какую программу выполнял Кибик, если его путь оказался таким, как показано на рисунке* 6*). *Начальные условия те же, рисунок уменьшен вдвое.*

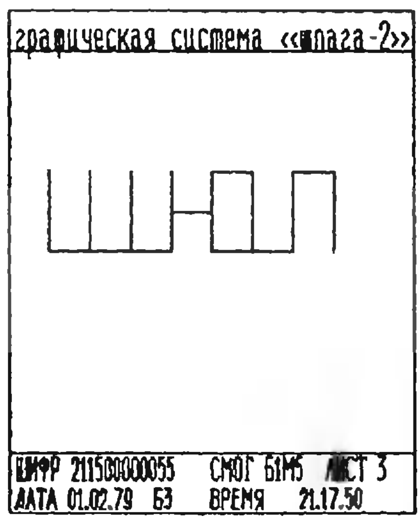


Рис. 6.

*) Рисунок 6 нарисован графопостроителем системы Шпага (об этой системе мы расскажем в одном из следующих номеров). Ученикам 3—4 классов А. Ершову, С. Пустошилову и А. Филатовой из Новосибирской школы юных программистов был дан ответ к заданию 1.3; по этому ответу они составили программу для графической системы Шпага, по которой и был нарисован рисунок 6, т. е. «смоделирована» работа Кибика.

Гибкие системы предписаний, синтаксические диаграммы и переменные поля

Урок 2

Для универсальных ЭВМ и роботов, имеющих большие системы предписаний, огромное значение имеет с п о с о б и х з а д а н и я. До сих пор мы задавали СПР «жестким» способом: прямым перечислением всех допустимых предписаний. Понятно, что это — далеко не лучший путь: большие множества жестким способом задать неудобно или невозможно. Нельзя описать этим способом, например, даже сложение произвольных целых чисел. Ведь для каждой пары складываемых чисел нужно предусмотреть в СПР отдельное предписание.

Однако из курса математики известно, что перечисление — не единственный способ задания множеств. Гораздо чаще используют «гибкое» описание: записывается формула или правило, позволяющее получить все элементы множества или проверить, принадлежит ли некоторый объект этому множеству. Второй урок посвящен одному из «гибких» способов описания СПР — синтаксическим диаграммам.

Синтаксическая диаграмма — это правило построения предписания, заданное в графическом виде. Диаграмма показывает, из каких частей можно строить предписание и в каком порядке должны быть расположены эти части. Синтаксическая диаграмма состоит из отдельных полей, соединенных стрелками. Каждое такое поле (обычно это — слово, число или знак) — часть предписания, а стрелки показывают, в каком порядке можно соединять эти части. Каждая диаграмма имеет начальную точку, обозначаемую *Н*, и конечную, обозначаемую *К*.

Для того чтобы получить правильно предписание при помощи синтаксической диаграммы, нужно провести какой-либо путь из начальной точки в конечную, двигаясь строго по направлению стрелок, и выписывать подряд все встретившиеся на этом пути поля. Например, синтаксические диаграммы для вездехода Кибик, описанного в конце первого урока, могут выглядеть так:

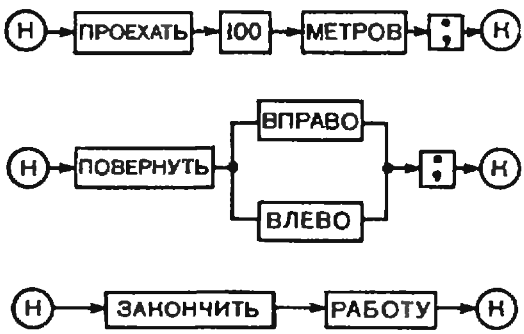


СХЕМА 2

Обратите внимание, что вторая диаграмма описывает сразу два предписания: повернуть вправо и повернуть влево. Так как из начальной точки в конечную можно пройти двумя путями, программист выбирает тот вариант, который нужно использовать в каждом конкретном случае.

Другой способ получения различных предписаний по одной диаграмме — использование переменных полей.

Переменное поле — это часть диаграммы, которую при составлении программы нужно заменить другим текстом из некоторого заданного набора. На синтаксических диаграммах переменные поля обозначают о в а л а м и, а слова и знаки, которые нужно в точности переписывать в текст программы (так называемые *постоянные поля*), — п р я м о у г о л ь н и к а м и.

Например, в СПР одного из роботов может встретиться такая диаграмма:

СХЕМА 3

Здесь (натуральное число)

— это переменное поле, которое нужно заменить при составлении программы нужным по смыслу числом; при этом может получиться:

ПРОЕХАТЬ 124 М;

или

ПРОЕХАТЬ 1 М;

Бессмысленно было бы переписать в программу название этого поля. В ответ на предписание:

ПРОЕХАТЬ НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО М;

робот в самом лучшем случае отпечатает сообщение «Не понял!» и будет совершенно прав.

Обратите внимание, что постоянные поля,

$\boxed{\text{ПРОЕХАТЬ}}$, $\boxed{\text{М}}$ и $\boxed{;}$

должны быть переписаны в программу дословно.

Переменные поля встречаются не только в программировании. Вот пример схемы предложения с переменными полями, которая не имеет ни малейшего отношения к вычислительной технике:

СПРАВКА

Дана . . . . в том, что он(а) учится в . . . классе школы № . . . . . района, города . . . .

Директор школы . . . . .

Задание 2.1. *Подсчитайте, сколько переменных полей в этом бланке, и попробуйте записать его по правилам, принятым для синтаксических диаграмм предписаний. К какой группе, из рассматривавшихся на первом уроке, относится предложение, которое получится из этой диаграммы после правильного заполнения всех переменных полей?*

Переменные в математике — это тоже разновидность переменных полей. Буква x в формуле

$$2x+432-x/8$$

— это переменное поле для вычислений по этой формуле. Например, при $x=23$ букву x в формуле нужно заменить «другим текстом» — числом 23.

Задание 2.2. *Запишите эту формулу по правилам, принятым для оформления синтаксических диаграмм.*

По аналогии с математическими формулами, текст, который проставляется в предписание вместо переменного поля, называется *значением* этого поля. Например, значением поля (целое число) может быть любое целое число.

Разумеется, при описании СПР множество значений каждого переменного поля должно быть задано. Обычно для этого используют такие же синтаксические диаграммы, как и для предписаний:

Натуральное число

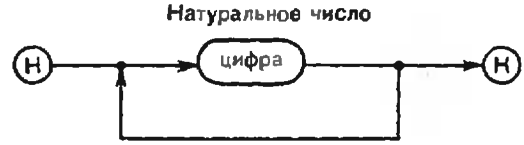


СХЕМА 4

В этой диаграмме есть еще одно переменное поле: (цифра) Множество его значений можно описать, как показано на схеме 5.

Задание 2.3. *Поясните, какое неформальное соглашение, обычно используемое при записи натуральных чисел, не учтено в схемах 4 и 5?*

Используя синтаксические диаграммы, можно описать порядок работы ЭВМ и роботов с памятью. Но перед этим мы предлагаем вам выполнить несколько заданий для тренировки в составлении и чтении синтаксических диаграмм.

Цифра

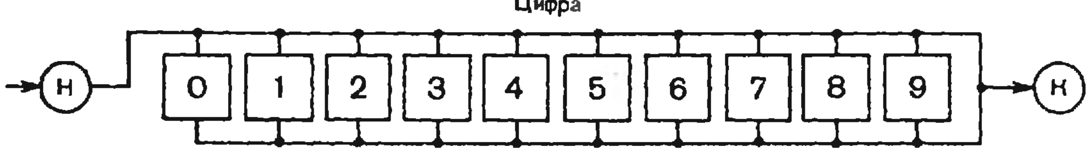


СХЕМА 5

Задание 2.4. *Переменное поле* текст *описывается следующей диаграммой:*

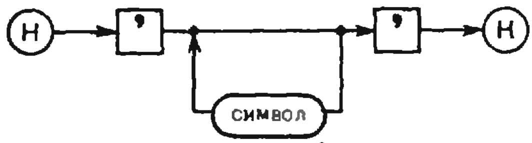


СХЕМА 6

Здесь символ — это буква, цифра или любой знак, имеющийся на клавиатуре терминала, за исключением апострофа (').

Пример текста:

'ЭТО ПРАВИЛЬНЫЙ ТЕКСТ'

Приведите четыре примера правильных текстов и определите, допускается ли диаграммой пустой текст ''

Задание 2.5. *Переменное поле* вещественное число *в языке Робик описывается диаграммой:*

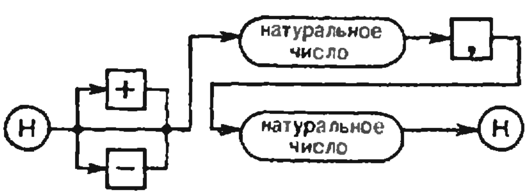


СХЕМА 7

(В языках программирования принято отделять целую часть от дробной при помощи точки, а не запятой, как в школьной математике.) Какие из приведенных ниже вещественных чисел получаются по этой диаграмме:

5.3—52.0 10.00000+5 0—54. +2,11/25.

Приведите четыре примера правильной записи вещественных чисел на Робике.

Задание. 2.6. *Нарисуйте синтаксическую диаграмму для описания обычной математической формы записи вещественных чисел. Учтите, что в математике целое число — это частный случай вещественного, а в Робике это не так: числа без дробной части не должны списываться диаграммой.*

Задание 2.7. *Нарисуйте диаграмму для переменного поля в Робике, значением которого может быть целое число или вещественное число.*

Задание 2.8. *Система предписаний робота Кибик-2 описывается диаграммой:*

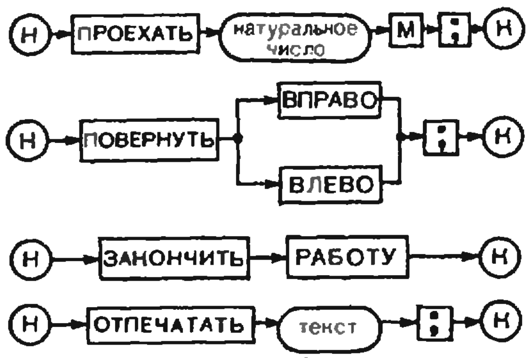


СХЕМА 8

Кибик-2 находится в точке А (800, 500) *и развернут вдоль положительного направления оси ординат. Он должен посетить точки: В* (800, 800), *С* (300, 200), *D* (925, 931) *и вернуться в точку А.*

После прибытия в очередную точку Кибик-2 должен отпечатать на терминале сообщение об этом, например:

'Я ПРИБЫЛ В ТОЧКУ А'

Составить программу.

Г. Звенигородский

Заочная физическая школа

Заочная физическая школа (ЗФШ) при физическом факультете МГУ объявляет набор учащихся в 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ЗФШ — помочь учащимся средней школы глубже изучить физику в объеме школьной программы, а также лучше подготовиться к вступительным экзаменам по физике в высшие учебные заведения, в первую очередь — на физический факультет МГУ.

Прием в ЗФШ проводится на основании результатов решения вступительного задания, публикуемого ниже. Решение вступительного задания необходимо отослать **до 15 октября** по адресу: *117234, Москва, Ленинские горы, МГУ, Физический факультет, Заочная физическая школа.* В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим домашним адресом и два экземпляра анкеты, написанной на листах плотной бумаги размером 7×12 см и заполненной по следующему образцу:

Фамилия, имя, отчество	*Сидоров Иван Петрович*
Класс	*9-й*
Профессия родителей и занимаемая должность	*отец — инженер* *мать — врач*
Подробный домашний адрес	*248016, г. Калуга, ул. К. Либкнехта, д. 4, кв. 73*
Номер и адрес школы	*Школа № 10, ул. Пушкина, д. 3.*

Решение приемной комиссии ЗФШ о зачислении будет сообщено до 10 ноября 1979 года. Проверенные вступительные задания обратно не высылаются.

Зачисленным в ЗФШ в течение года высылаются методические разработки и контрольные задания по разделам физики, изучаемым в соответствующих классах средней школы. Решенное задание оценивается, рецензируется и высылается учащемуся (для этого каждый раз вместе с решенным заданием учащийся должен вкладывать конверт с написанным домашним адресом). Учащиеся 9 класса ЗФШ по окончании года переводятся в 10 класс на основании оценок, полученных за решение контрольных заданий. Успешно закончившие обучение получают справку об окончании ЗФШ.

Вступительное задание

9 класс

1. На рисунке 1 изображена система движущихся тел. Все поверхности гладкие. Угол $\alpha = 30°$, $m = 1$ кг. Определить ускорения тел и натяжения нитей. Массами нитей и блока, а также трением в оси блока пренебречь.

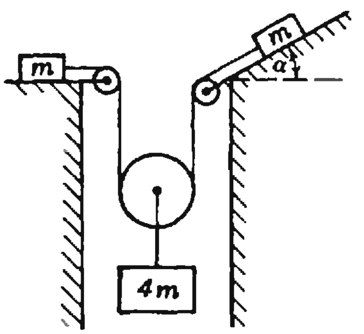


Рис. 1.

2. Два идеально упругих шара массами m_1 и m_2 движутся вдоль одной прямой со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ соответственно. Во время столкновения шары деформируются, причем сначала деформация растет, а затем, достигнув максимального значения, уменьшается. Найти значение потенциальной энергии деформации в момент, когда она максимальна.

3. Найти сопротивление между точками A и B цепи, показанной на рисунке 2; $R = 12$ Ом, $r = 3$ Ом.

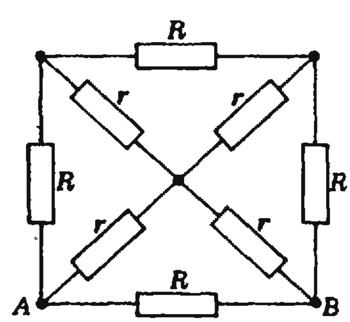


Рис. 2.

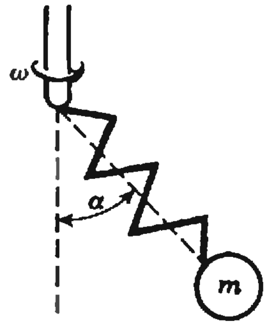


Рис. 3.

10 класс

1. Пружина жесткостью k в нерастянутом положении имеет длину l_0. К нижнему концу пружины подвешено тело массой m, а верхний конец прикреплен к вертикальной оси, вокруг которой пружина может вращаться (рис. 3). Построить график зависимости угла α, образуемого пружиной с осью, от величины угловой скорости ω вращения пружины. Считать, что угловая скорость изменяется настолько медленно, что при каждом значении ω движение успевает установиться. Массой пружины пренебречь.

2. В цилиндре, закрытом поршнем, при температуре T_1 находится m кг воды в жидком состоянии и водяной пар (других газов нет). Объем цилиндра при температуре T_1 равен V_1. Поршень подвешен на пружине жесткостью k, причем пружина находится в ненапряженном состоянии. Затем цилиндр медленно нагревают до температуры T_2, при этом вся вода испаряется. Найти установившееся давление под поршнем. Площадь поршня S, плотность насыщенного водяного пара при температуре T_1 ρ_{H1}, плотность воды при этой температуре ρ_1. Расширением цилиндра при нагревании и трением поршня о стенки цилиндра пренебречь. Молярная масса воды μ.

3. Замкнутый провод длиной l с постоянным сечением σ и удельным сопротивлением ρ свертывают в плоскую восьмерку так, что отношение радиусов образовавшихся окружностей равно 2. Полученный контур помещают в переменное однородное магнитное поле, причем плоскость контура перпендикулярна полю. Найти ток, протекающий по проводу, если скорость изменения магнитного поля постоянна и равна k.

Заполним плоскость кривыми

(Окончание. Начало см. на с. 43)

ка. Покажем это. Рассмотрим четыре прямые $l_1 = (AB)$, $l_2 = (DC)$, $l_3 = (AC)$, $l_4 = (BD)$ и обозначим через

$$b_ix+c_iy+d_i=0 \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

уравнение прямой l_i (читатель без труда сможет найти числа b_i, c_i, d_i, но нам они не нужны). Положим

$$F(x,\ y) = (b_1x + c_1y + d_1)(b_2x + c_2y+d_2)$$
$$G(x,\ y) = (b_3x + c_3y + d_3)(b_4x+c_4y+d_4)$$

и рассмотрим семейство кривых

$$\alpha F(x,\ y) + \beta G(x,\ y) = 0,$$

зависящих от параметров α, β. Подставим в это уравнение координаты точки E и заметим, что оба числовых коэффициента $F(x_0;y_0)$, $G(x_0;y_0)$ не могут обратиться в нуль одновременно (иначе E совпала бы с одной из точек A, B, C, D!). Поэтому можно подобрать значения параметров α_0, β_0 так, чтобы получилось числовое тождество. Тогда ясно, что уравнение

$$\alpha_0F(x;\ y) + \beta_0G(x;\ y) = 0$$

дает искомую кривую. Доказательство единственности кривой мы оставляем читателю. (Указание. Предположите, что их две — $F_1(x,\ y)$, $F_2(x,\ y)$ — и покажите, что для некоторых α, β кривая второго порядка $\alpha F_1 + \beta F_2 = 0$ пересекает некоторую прямую по трем точкам, что невозможно.)

Намеченное выше доказательство устанавливает более общий факт — так называемую теорему Паскаля: *через любые 5 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, проходит ровно одна кривая второго порядка.*

Посмотрим теперь внимательней на наш рисунок. Шесть прямых (попарно соединяющих наши точки A, B, C, D) и две параболы (содержащие все 4 точки) разбивают плоскость на 5 частей: голубую, розовую, штрихованные (розовым и голубым) и белую. Белая часть заполнена эллипсами (один из них показан), а остальные четыре — гиперболами (две из них показаны).

Наши прошлогодние читатели возможно вспомнят похожий рисунок на обложке *), число частей на котором было, однако, иное. Как заметил один наш читатель, расположение и число областей на той обложке было «нетипичным». Это объясняется тем, что там рассматривался в известном смысле вырожденный случай: две из прямых, соединяющих пары точек, параллельны. В общем же случае всегда получается 5 частей: «эллиптическая» и четыре «гиперболических».

А. Б.

*) «Квант», 1978, № 9.

Новые книги

В этом номере мы публикуем краткие аннотации на книги по математике и физике, вышедшие в III квартале 1979 года.

Математика

Издательство «Наука»

1. Гжегорчик А. *Популярная логика.* Перевод с польск. Издание 3-е. Объем 5 л., тираж 100 000 экз., цена 30 к.

Книга Анджея Гжегорчика предназначена для того, чтобы удовлетворить возрастающий интерес к формальной логике людей, не являющихся специалистами ни в математике, ни в логике. В наши дни эта отрасль науки получила важнейшее прикладное значение. Теория электронных цифровых машин и других «умных» автоматов, изучение структуры языка, глубокие философские вопросы оснований математики и других наук — вот сфера применения формальной логики. Формальная логика — это наука, устанавливающая общие методы (правила, схемы) правильных умозаключений. Наиболее важную роль умозаключения играют в математике: все математические теоремы опираются на точные доказательства, основанные на выводе следствий из математических аксиом. Поэтому неудивительно, что больше всего схем (способов) правильных умозаключений ученые открыли при анализе математических рассуждений. В силу этого современная формальная логика носит название математической логики, так как прежде всего она изучает математические рассуждения. Делает она это при помощи логических символов; поэтому современную формальную логику называют также символической логикой.

Книга Гжегорчика посвящена простейшей части математической логики — так называемой *логике высказываний*. На ее примере автор показывает, на чем основаны современные логические схемы правильных умозаключений и каким образом в современной формальной логике используются логические символы. От читателя не требуется ни знания математических фактов, ни привычки к чтению математической литературы. Это — общедоступный очерк. Автор ведет изложение в разговорном стиле, логические символы заменяет словами. Многочисленные примеры облегчают усвоение материала.

2. Калужнин Л. А., Сушанский В. И. *Преобразования и подстановки.* Перевод с укр. Объем 4 л., тираж 100 000 экз., цена 20 к.

В книге рассматриваются важные частные виды отображений — преобразования и подстановки конечных множеств. Детально изучаются свойства операции суперпозиции функций применительно к преобразованиям и подстановкам и вводятся понятия группы подстановок и полугруппы преобразований. На примере группы подстановок иллюстрируются важные понятия современной абстрактной теории групп: порядок элемента, система образующих.

Вторая часть книги требует больше усилий для понимания и рассчитана на учащихся физико-математических школ. В ней рассказывается о простейших применениях теории групп для классификации многочленов со многими переменными, исследованиях корней уравнений высших степеней, математическом анализе игры в пятнадцать.

Книга может быть использована как для самостоятельного изучения учащимися средних школ, так и учителями в качестве основы факультативного курса.

3. Ершов А. П. *Три урока по алголу.* Объем 5 л., тираж 100 000 экз., цена 20 к.

Эта книга предназначена для первоначального ознакомления с алголом и содержит всю необходимую информацию, чтобы «читать» на алголе. Изложение ведется в такой последовательности: первый урок — словесное описание основных конструкций языка; второй урок — изложение особых случаев и исключений из общих правил первого урока; третий урок — примеры, иллюстрирующие самые важные случаи употребления тех или иных конструкций.

Книга может быть полезна всем желающим изучать алгол.

4. Салтыков А. И., Селюшко Г. А. *Программирование для всех.* Объем 10 л., тираж 100 000 экз., цена 40 к.

В книге излагаются основы программирования на ЭВМ. Рассматриваются вопросы, связанные с представлением решения математических задач в виде алгоритмов и программ. Основные приемы программирования иллюстрируются на языке фортран.

Книга рассчитана на широкий круг читателей и может быть использована в качестве самоучителя по программированию.

Издательство «Просвещение»

5. Березина Л. Ю. *Графы и их применение.* Объем 9 л., тираж 40 000 экз., цена 30 к.

Автор знакомит читателя с основными определениями, методами и приложениями теории графов. Изложение, подбор упражнений и иллюстраций дают достаточно полное представление об основных идеях и методах теории графов и наиболее интересных ее приложениях. Автор показывает, как можно использовать графы при решении логических задач, задач на смекалку, головоломок, задач олимпиадного типа.

Эта книга может быть использована учителями для внеклассной работы.

6. Щербаков Р. Н., Пичурин Л. Ф. *От проективной геометрии — к неевклидовой.* (*Вокруг абсолюта.*) Объем 8 л., тираж 100 000 экз. цена 25 к.

Книга посвящена неевклидовой геометрии. Изложение основано на идеях проективной геометрии и понятии *абсолюта* — множества бесконечно удаленных элементов. Авторы в популярной и занимательной форме излагают основы проективной геометрии, описывают различные неевклидовы геометрии на плоскости.

Книга может быть использована во внеклассной работе в школе и для самостоятельного чтения учащимися. Она может быть полезной также всем читателям, интересующимся геометрией.

Физика

Издательство «Наука»

1. Зубов В. Г. *Молекулярные явления. Термодинамика.* Объем 20 л., тираж 200 000 экз., цена 80 к.

Эта книга является второй частью (первая часть «Механика» вышла в 1978 году) курса основ современной физики для подготовительных отделений вузов. Курс содержит весь материал программы вступительных экзаменов по физике.

2. Каганов М. И. *Электроны, фононы, магноны.* Объем 10 л., тираж 50 000 экз., цена 35 к.

В книге в популярной форме излагается квантовая теория твердого тела. Понять суть и описать с единой точки зрения очень несхожие свойства различных твердых тел можно, лишь используя представления о квазичастицах — квантах энергии кристалла. Из книги читатель узнает, что сближает квазичастицы с обычными частицами, чем они отличаются друг от друга, в какой взаимосвязи находятся свойства твердого тела со свойствами отдельных квазичастиц и их коллективов. Автор знакомит читателя с такими квазичастицами, как фононы, магноны, экситоны и плазмоны.

3. Мякишев Г. Я. *Элементарные частицы.* Издание 3-е, исправленное и дополненное. Объем 10 л., тираж 50 000 экз., цена 35 к.

В книге в простой и доступной форме излагается физика элементарных частиц. Прочитав эту книгу, читатель сможет не только получить представление о мире элементарных частиц, но и почувствовать ту напряженную, полную неожиданных открытий и смелых гипотез атмосферу, в которой живут физики, изучающие элементарные частицы.

Написана книга живо, увлекательно, с юмором, а также (что является немаловажным достоинством) достаточно кратко.

В данном издании отражены важнейшие достижения физики элементарных частиц за самые последние годы.

4. Бишоп Р. *Колебания.* Перевод с английского. Издание 2-е, переработанное. Объем 10 л., тираж 50 000 экз., цена 55 к.

В популярной и увлекательной форме в книге рассказывается о колебаниях в природе и технике. Затрагивается широкий круг вопросов: колебания машин и приборов, термоупругие колебания, автоколебания, случайные колебания, методы борьбы с вредными колебаниями и использование полезных колебаний. Изложение иллюстрируется большим количеством примеров и фотографий.

5. Навашин М. С. *Телескоп астронома-любителя.* Издание 4-е. Объем 25 л., тираж 30 000 экз., цена 1 р. 10 к.

В книге рассказывается об устройстве телескопа и о возможностях самостоятельного изготовления телескопов-рефлекторов средних размеров.

6. Новиков И. Д. *Эволюция Вселенной.* Объем 10 л., тираж 40 000 экз., цена 40 к.

Книга содержит научно-популярное изложение современной физической космологии — науки о строении и эволюции Вселенной в целом. Этот раздел астрофизики переживает сейчас бурное развитие, связанное с новыми открытиями астрономии, физики и теоретическими разработками. В книге рассказывается о расширяющейся Вселенной, о фотометрическом и гравитационном парадоксах, об открытии реликтового излучения и теории горячей Вселенной, о физике процессов в расширяющейся Вселенной, о новых открытиях наблюдательной космологии.

«Атомиздат»

7. Сонин А. С. *Кентавры природы.* Объем 8 л., тираж 100 000 экз., цена 30 к.

Эта книга о необычных веществах — жидких кристаллах, сочетающих в себе свойства жидкостей и кристаллов. От жидкостей они взяли текучесть и вязкость, а от кристаллов — зависимость физических свойств от направления измерения.

Необычны свойства жидких кристаллов, необычно и их использование в технике, биологии и медицине. Они помогают фотографировать в невидимых лучах, диагностировать воспалительные процессы, измерять температуру в недоступных местах, определять примеси вредных веществ в воздухе. Они — в циферблатах наручных часов, информационных табло, вычислительных машинах, навигационных самолетных приборах ... Оказывается, многие вещества в живых организмах и, в частности, в клетках нервов и мускулов являются жидкими кристаллами!

И. Клумова,
М. Смолянский

Новая научно-популярная серия издательства «Наука» — Библиотечка «Квант»

В 1980 году по решению Президиума Академии Наук СССР Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука» начинает издание новой серии научно-популярных книг — Библиотечки «Квант». Для руководства серией создана специальная редколлегия, которую возглавляют академики И. К. Кикоин и А. Н. Колмогоров.

Книги, издаваемые в этой серии, будут предназначены в первую очередь школьникам — ученикам старших классов. Но мы уверены, что серия будет с интересом встречена студентами, учителями, преподавателями вузов и техникумов, а также всеми, кто интересуется естественными науками и их историей.

Название серии подчеркивает общность задач этой серии и нашего журнала. Это прежде всего — воспитание патриотизма, чувства гордости за отечественную науку, пробуждение интереса к занятиям естественными науками и оказание помощи в этих занятиях, расширение кругозора, воспитание умения логически мыслить и т. д.

В Библиотечке «Квант» будут издаваться новые, специально написанные для этой серии книги, а также переиздаваться лучшие популярные книги по естественным наукам советских и зарубежных авторов. Отдельные выпуски будут составлены из материалов журнала «Квант». Представляем первые книги этой серии. Они выйдут в 1980 году.

Книга *«Опыты в домашней лаборатории»* будет посвящена описанию простых, но интересных и поучительных опытов, которые можно поставить у себя дома, пользуясь совсем несложным оборудованием. Она составлена из лучших статей, опубликованных в 1970—1979 годах в Лаборатории «Кванта». Мы надеемся, что эта книга поможет нашим читателям провести первые самостоятельные физические опыты.

Вторая книга — *«Замечательные ученые»* — составлена из опубликованных в нашем журнале статей, посвященных выдающимся ученым: Копернику, Кеплеру, Ньютону, Лапласу, Амперу, Столетову, Ковалевской, Лебедеву и др. В этих статьях рассказывается о жизни и работах этих ученых, о том, как были сделаны эти работы, что позволило выполнить те или иные опыты, какие усовершенствования были внесены в технику эксперимента, на чем основывались эти ученые, высказывая свои гипотезы.

Без сомнения, многих читателей заинтересуют три книги, которые будут переизданы в 1980 году. Это прежде всего — книга М. Фарадея *«История свечи»*. Ей уже более 100 лет. В книге собраны лекции, прочитанные великим английским физиком для детей. В ней автор, рассказывая о свече, рассказывает и о капиллярных явлениях, и о сжижении газов, и о химических реакциях, и о многих других явлениях. На лекциях Фарадей показывал много интереснейших опытов, пользуясь шариками, тарелками, игрушками и т. д. Многие из этих опытов будет интересно повторить и современному читателю. В дополнении к книге, написанном доктором физико-математических наук Б. В. Новожиловым, рассказывается о современных представлениях о горении.

Вторая книга называется *«Атомы и электроны»*. Это — первая часть очень интересной книги «Атомы, электроны, ядра», написанной около 40 лет тому назад известным советским физиком и замечательным популяризатором М. П. Бронштейном. Она относится к числу лучших образцов научно-популярной литературы. В ней рассказывается, как впервые были измерены массы и размеры атомов и молекул, как был открыт электрон, какие опыты привели к выяснению структуры атомов и молекул. (Вторая часть книги будет издана в 1981 году.)

Элементарной алгебре и теории групп посвящена книга академика П. С. Александрова *«Введение в теорию групп»*. Эта область математики находит широкое применение в физике, особенно в таких ее областях как кристаллография, физика твердого тела, физика элементарных частиц. К настоящему изданию книга подверглась существенной переработке.

* * *

Из новых книг прежде всего следует назвать книгу академика В. М. Глушкова и кандидата физико-математических наук В. Я. Валаха *«Что такое ОГАС?»*. В ней рассказывается о математических задачах, связанных с планированием и управлением народным хозяйством страны. Авторы на интересных примерах описывают идеи и методы оптимального управления, обсуждают возможности электронно-вычислительных машин. Подробно рассказывается о целях, задачах и перспективах ОГАС — общегосударственной автоматизированной системы сбора и обработки информации для учета, планирования и управления.

Другая новая книга, которая готовится к изданию, написана профессором Я. А. Смородинским. Называется она *«Температура»*. Эта книга познакомит читателя с тем, как возникло понятие температуры, как была создана температурная шкала, как получают и измеряют низкие температуры, а также с такими интересными объектами как звезды, квазары, «черные дыры» и т. п.

Два специальных выпуска будут посвящены задачам. Это — книга *«Задачи по физике»*, написанная кандидатами физико-математических наук Л. Г. Асламазовым и И. Ш. Слободецким. В ней собраны задачи «олимпиадного типа», многие из которых публиковались ранее в Задачнике «Кванта».

Вторая книга посвящена логическим задачам. Написана она Л. П. Мочаловым и называется *«Головоломки»*. Книга содержит около 200 логических задач, для решения которых нужны сообразительность и смекалка и не очень важен уровень математической подготовки читателя. Некоторые из головоломок были опубликованы в нашем журнале и вызвали большой интерес читателей.

В 1980 году также планируется выпуск перевода книги известного норвежского математика О. Оре *«Приглашение в теорию чисел»*. В ней рассказывается о теории сравнений, о системах счисления и т. д. В книге много задач, ребусов, рассказов о магических квадратах; написана она занимательно и интересно. Автор знакомит читателя с современным состоянием теории чисел, применениями теории, с задачами, еще не получившими своего решения.

В 1980 году выйдет еще одна книга зарубежного автора. Это — книга замечательного польского математика Г. Штейнгауза *«Математический калейдоскоп»*. В этой книге автор показывает, как математика пронизывает всю нашу жизнь. Это набор очень интересных рассказов, задач и вопросов, посвященных самым различным областям математики. Перевод, который планируется в 1980 году, сделан с последнего польского издания, полностью переработанного автором и дополненного большим новым материалом.

На все эти книги уже сейчас можно сделать предварительный заказ, оставив открытку в магазинах «Книга — почтой». (Адреса таких магазинов вы можете найти в «Кванте», 1978, №№ 3, 6.)

Редколлегия серии просит Вас написать нам, какие книги Вы хотели бы прочитать в нашей серии (в том числе и книги, изданные ранее как в нашей стране, так и за рубежом).

И. Слободецкий

Прекрасное собрание первоисточников по математике

Любители математики получили хорошую возможность познакомиться с основными математическими теориями, идеями, открытиями непосредственно по первоисточникам и в их историческом развитии: издательство «Просвещение» выпустило в свет «Хрестоматию по истории математики» (кн. 1 — 1976 г., кн. 2 — 1977 г.). «Хрестоматия», составленная ведущими советскими специалистами по истории математики во главе с профессором А. П. Юшкевичем, освещает развитие математики от глубокой древности до XX века.

Читатели почувствуют особенности рассуждений в период создания соответствующих математических трудов. А особенности эти значительны. Зачастую язык подлинника весьма труден. Но каждый отрывок сопровождается, как правило, его пересказом на современном языке и квалифицированными комментариями. Кстати, комментарии соединяют отдельные отрывки в единое целое, дополняют пропущенные звенья и дают общую характеристику всему содержанию соответствующих документов. Иногда комментарии содержат краткое описание других документов, других трудов ученых той же эпохи.

1-я книга состоит из трех частей.

Первая часть посвящена арифметике и алгебре. За отрывками, принадлежащими математикам Древнего Китая, Индии, Вавилона и Египта, следуют отрывки из работ математиков эпохи Возрождения (например, из сочинений Кардано по решению уравнений и введению комплексных чисел) и трудов Р. Декарта, И. Ньютона, Р. Дедекинда, Н. И. Лобачевского, К. Гаусса, Л. Эйлера, Д. Буля.

Вторая часть относится к теории чисел. За изложением трудов Евклида идут диофантовы уравнения, теоремы Ферма с доказательствами, принадлежащими Эйлеру, элементы теории групп у Эйлера, теория сравнений и теория комплексных чисел Гаусса, а также теоремы по теории чисел П. Л. Чебышева, Б. Римана, А. Пуанкаре.

В третьей части, содержащей геометрический материал, читатель знакомится с измерением объемов в Древнем Египте, с геометрией Евклида и с геометрией народов Средней Азии и Европы. Интересны теория конических сечений Аполлония, вопросы проективной геометрии Паппа, уравнения кривых у П. Ферма, Р. Декарта, И. Ньютона и Л. Эйлера. Далее излагаются вопросы дифференциальной и неевклидовой геометрии. Завершается третья часть материалами по теории абстрактных пространств и топологии.

Во 2-й книге помещены отрывки из работ, содержащих элементы математического анализа: теоремы Архимеда, Евклида, средневековых ученых, ученых XVII—XVIII веков. В отрывках из первоисточников ярко характеризуются основные направления развития математического анализа в XIX—XX веках. Этот материал близко примыкает к программе 9—10 классов школы.

Во второй части 2-й книги читатель знакомится с основными понятиями и теоремами теории вероятностей и их приложениями в науке и на практике. На современном этапе развития школы и при возрастании роли математики и ее приложений знакомство с материалом этой части весьма полезно.

К сожалению, тираж книги очень невелик, и ее первый том сразу же по выходе в свет стал библиографической редкостью.

И. Петраков

Геометрические решения геометрических задач

1. $1+0{,}75\sqrt{3}$. 3. $\sqrt{3}R^2$. 4. $0{,}75\,ab$. 5. Указание. «Достройте» данную полуокружность до окружности и трапецию $ABCD$ до трапеции $EBCF$, описанной около этой окружности. 6. $\widehat{BKD}=90^\circ$, $\widehat{BDK}=60^\circ$, $\widehat{DBK}=30^\circ$. 7. $\frac{a^2}{b}$. 8. 120°. 9. $\arccos\frac{2+\sqrt{2}}{4}$, $\pi-2\arccos\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ или $\arccos\frac{2-\sqrt{2}}{4}$, $\pi-2\arccos\frac{2-\sqrt{2}}{4}$.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 8)

1. Уменьшаемое оканчивается цифрой 6, вычитаемое — цифрой 4.

2. Цифры a и b должны удовлетворять уравнению

$$100a+b=k\,(10a+b),$$

или

$$10a\,(10-k)=b\,(k-1).$$

Легко видеть, что $1<k\leqslant 10$ ($a\neq 10$).

При $k=10$ получаем $b=0$; тогда $a=1$ и нужное число — это 10 ($100=10\cdot 10$).

При $k=2$, 3, 4, 5, 8 решений нет.

При $k=6$ получаем число 18 ($108=6\cdot 18$).

При $k=7$ — число 15 ($105=7\cdot 15$).

При $k=9$ — число 45 ($405=9\cdot 45$).

Ответ: 10, 15, 18, 45.

3. Легко показать, что число команд, участвующих в турнире, не может быть четным.

Возможны два случая.

1°. Каждая из семи команд, имевших в среду после очередного тура четное число встреч, в одном из предшествующих туров была свободной от игры.

2°. Каждая из этих семи команд не была свободной от игры ни в одном из предыдущих туров.

В первом случае после следующего тура у всех этих семи команд будет по нечетному числу встреч. Одна из остальных команд, свободная в этот день от игры, будет по-прежнему иметь нечетное число встреч. Следовательно, после следующего тура нечетное число встреч имели восемь команд. Остальные команды провели четное число встреч. По подсчетам Бори таких команд оказалось семь. Значит, всего в турнире участвовало 15 команд.

Рассуждая аналогично, получим для второго случая ответ — 13 команд.

Итак, в турнире участвовало 13 или 15 команд.

4. 6 часов.

5. Двенадцатью способами.

Кроссворд «Космос»

(см. «Квант» № 8, 3-ю с. обложки)

По горизонтали: 5. Юпитер. 6. Эллипс. 10. Орион. 11. Вечер. 12. Сопло. 13. Венера. 15. «Молния». 16. Кульминация. 19. Космос. 20. Ригель. 21. Визир. 23. Старт. 25. Седоя. 26. Дракон. 27. Хрунов.

По вертикали: 1. Титан. 2. Феникс. 3. Глушко. 4. Титов. 7. Персей. 8. Афелий. 9. Гипокинезия. 14. «Атлас». 15. Мицар. 17. «Восток». 18. Алголь. 21. Волков. 22. Ресурс. 24. Тукан. 25. Стенд.

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шихановнч

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров, И. Смирнова, В. Чернов

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректоры Л. Боровина, Е. Сидоркина

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 2/VII-79
Подписано в печать 9/VIII-79
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 6,36 Т-11292
Цена 30 коп. Заказ 1485 Тираж 279390 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета
СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области

ЗАДАЧА О ТУРИСТЕ

Архипелаг включает семь островов (рис. 1). Из-за рифов у побережья пристани для кораблей оборудованы только на островах 2, 4, 5, 6, 7. На архипелаге действует система паромных переправ, изображенная на рисунке. Какой маршрут для посещения всех островов нужно выбрать туристу, использующему для переезда с одного острова на другой только паромы, чтобы посетить каждый остров только один раз, если после посещения последнего из островов он покидает архипелаг?

А. Никоноренков

Цена 30 коп.
Индекс 70465

На этой странице обложки вы видите четыре семейства кривых, нарисованные ЭВМ. Их уравнения в полярной системе координат (см. «Квант», № 7 за 1977 год) имеют такой вид:
первое семейство: $r = A\,[5+2\cos\varphi+3\,|\cos\varphi|^m \operatorname{sign}(\cos\varphi)]-B\sin^2 18\varphi\cos^8\varphi/2$ (кривые из этого семейства приведены и на первой странице обложки);
второе семейство: $r=A(\cos\varphi+\sqrt{3+\cos^2\varphi})\times\cos^2 3{,}5\,\varphi-B\sin^2 60\varphi$;
третье семейство: $r=A\cos 4\alpha+B$, $\varphi=\alpha-C\sin 4\alpha$ (здесь кривые заданы в *параметрической форме* — каждому значению *параметра* α отвечают определенные значения r и φ, задающие точку на плоскости; о параметрическом задании кривых рассказывалось в «Кванте» № 8 за 1978 год в статье М. Башмакова); *четвертое семейство* $r=A(1+\cos 3\varphi)+B\sin^2 3\varphi$. Значения величин A, B, C и m — разные для разных кривых. При желании в некоторых из этих кривых можно узнать листья растений.

Ю. Котов